FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Formalização da tolerância à ausência de dados no processamento de sinais discretos

Raul Eduardo Capela Tello Rato

Dissertação para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Electrotécnica.

Orientador: Prof. Dr. Manuel Duarte Ortigueira

Dezembro de 2011

Formalização da tolerância à ausência de dados no processamento de sinais discretos.

Dedicatória e agradecimentos

Dedico este texto aos meus filhos.

Gostava de expressar os meus agradecimentos institucionais à FCT da UNL, e os meus agradecimentos pessoais ao Prof. Dr. Manuel. D. Ortigueira, ao Prof. Dr. A. Steiger-Garção, aos meus colegas e amigos, a todos os funcionários com que lidei e à minha família.

A todos agradeço pelo suporte e encorajamentos recebidos.

Resumo

É apresentada neste texto uma formalização da tolerância operacional à ausência de dados que possam ocorrer no processamento de sinais discretos. Esta investigação tem uma motivação empírica. Nasce dos problemas que se colocam em processamento e análise de sinais quando se tem de lidar com a ausência de conhecimento sobre os valores do sinal que existem fora do conjunto de observações disponíveis.

Investiga-se neste texto o conceito de operação tolerante à ausência de dados, à ausência de argumentos. É definida uma representação para a ausência de simbolo e é alegado que a lógica adequada para lidar correctamente com tais situações não pode ser a bivalente, tendo de ser no mínimo a trivalente.

Para lidar formalmente com as operações tolerantes é definido um tipo particular de conjunto finito, o urconjunto. É com base neste tipo de conjuntos que é possível definir tuplo tolerante e normas associadas. Uma conclusão é que num tuplo tolerante o número de dimensões pode exceder o número de componentes presente. É assim possível atingir definições mais abrangentes do que é um sinal discreto e do que é que são operações tolerantes.

Em conclusão formula-se a generalização tolerante da actual algebra e referem-se algumas linhas de investigação possíveis, como o estudo das probabilidades num contexto tolerante.

Palavras-chave: discreto, sinal, urconjunto, tolerante, operação.

Abstract

It is presented a formalization of operational tolerance to lack of data that may occur in the processing of discrete signals. This research has an empirical motivation. It was born from problems that arise in processing and analyzing signals when it is necessary to deal with the lack of knowledge about the signal values that exist outside the set of available observations.

This text investigates the concept of operation tolerant to missing data, tolerant to the lack of arguments. It is a defined a symbol for the lack of symbol and it is alleged that the logic appropriate to handle such situations can not be the bivalent and must be at least trivalent.

To deal formally with tolerant operations is defined a particular type of finite set, the urconjunto. Based on this kind of set it is possible to define tolerant tuple and related norms. One conclusion is that in a tolerant tuple the number of dimensions can exceed the number of actual components. It is thus possible to achieve more comprehensive definitions of what is a discrete signal and what are tolerant operations.

To conclude it is formulated the tolerant generalization for current algebra and shown some possible lines of inquiry, as the study of probabilities in a tolerant context.

Keywords: discrete, signal, urset, tolerant, operation.

Índice de matérias

Índice de figuras

Índice de tabelas

I - Introdução

I.1 - Sobre os sinais discretos finitos e as suas decomposições

Para o engenheiro interessado na resolução de problemas práticos, os sinais discretos são entidades finitas, concretas e bem definidas. Para ele, um sinal de voz pode ser um conjunto finito de valores, consubstanciado em palavras binárias num ficheiro de computador. Uma imagem poderá ser um conjunto finito de pixéis, cada um deles com os três valores cromáticos. Nas telecomunicações abundam os exemplos de sinais finitos, abstraídos como infinitos, sejam eles de rádio, de televisão, de telefone ou de outras origens. Noutros campos também é fácil encontrar sinais discretos finitos, como as crono séries financeiras representativas da actividade dos mercados, das bolsas e das cotações em geral, ou os sinais simbólicos, não numéricos, representativos de cadeias de ADN. Muitos outros exemplos de sinais seria possível referir, oriundos de sistemas físicos, económicos, biológicos, ...

No entanto, quando se pretende falar de sinais em geral, é conveniente abstrair a multiplicidade dos concretos que a prática oferece aos engenheiros. Surge assim a problemática da elaboração de uma definição de sinal, suficientemente ampla para englobar todos os casos de interesse e suficientemente restritiva para ainda permitir o desenvolvimento de técnicas úteis em diversas aplicações.

Nas formulações que usam a linguagem matemática para descrever a realidade, um sinal "é qualquer função associada a um fenómeno físico, económico ou social e que transporta algum tipo de informação sobre ele." (Ortigueira-2004). Os sinais surgem assim como objectos matemáticos. Este facto não é surpreendente. Em muitas das formulações da ciência actual, os fenómenos objectivos são descritos usando a linguagem mais apropriada conhecida pela humanidade. Essa linguagem é a Matemática. Assim, a realidade, com os respectivos problemas de interesse, é representada em linguagem matemática, representação essa que é computacionalmente manipulada, tanto de forma simbólica como numérica, até se obter uma representação da solução para os ditos problemas. Finalmente, essa solução é traduzida da linguagem matemática para comportamentos sobre objectos e entidades físicas, conseguindo-se assim a resolução efectiva da problemática estudada.

O presente texto pretende abordar questões formais relacionadas com sinais discretos finitos, de génese concreta, bem como examinar os pressupostos e manipulações a que os podemos sujeitar com o fim de extrair deles as informações ou efeitos que procuramos. Nesta ordem de ideias, neste texto, sempre que se referir sinal, estar-se-á a pressupor que o sinal é de **índole finita**. Quaisquer considerações que requeiram sinais com características infinitas serão devidamente assinaladas.

I.1.1 - Decomposições abelianas e EMD

Uma das classes de manipulações a que podemos sujeitar os sinais é a das importantíssimas decomposições abelianas. De uma forma geral, estas manipulações permitem, a partir de um sinal inicial, obter vários sinais derivados que podem ser considerados componentes do inicial, de tal forma que a reunião integral destes sinais derivados reconstrói o inicial, independentemente da ordem pela qual a dita reunião é consumada. Ou seja, diz-se que um sinal está decomposto abelianamente se a reunião comutativa da totalidade das componentes resultar na reconstrução do sinal original.

Em muitos casos de interesse esta reunião comutativa é encarada como uma soma, pelo que a afirmação anterior pode ser proferida como "um sinal está decomposto abelianamente em várias componentes se a soma dessas componentes resultar na reconstrução do sinal". Esta utilização do termo abeliano é para salientar a comutatividade, ou permutatividade como propõem Graham e Knuth (Graham-1994), dos operandos na operação de reconstrução do sinal.

A determinação da decomposição abeliana de um sinal é, em geral, um problema mal colocado, no sentido de Hadamard (Hadamard-1902). Para Hadamard, um problema bem colocado é aquele onde se verifica o seguinte par de condições:

a) A solução existe,

b) É única.

Este par de condições é aplicável a qualquer problema, mesmo que este seja consequente de uma formulação que não permita derivadas parciais. Um problema que não verifique qualquer uma destas condições é um problema mal colocado.

Convém referir que uma terceira condição é habitualmente enunciada em simultâneo com este par (Courant-1962). Esta terceira condição, facilitadora da analiticidade funcional, estipula que:

c) A solução é uma função contínua dos dados.

Note-se que, no entanto, esta terceira condição é desajustada quando os dados não são contínuos, quando não lhes é aplicável o conceito analítico de derivada direccional. Tal é o caso das séries temporais. Como se verá, uma técnica como a EMD (*Empirical Mode Decomposition*) não tem formulação analítica, apenas algoritmica e inerentemente discreta, pelo que para a EMD é pouco apropriado tecer considerações analíticas.

O problema da decomposição abeliana de sinais discretos é, em geral, mal colocado, pois a solução não é única. Para o exemplificar, consideremos um sinal que só pode assumir valores inteiros e com uma única amostra, que supomos como tendo o valor sete. Uma decomposição abeliana possível é em dois e cinco, outra em três e quatro, sendo muitas mais soluções possíveis, como menos um, seis e dois.

Nos casos correspondentes a circunstâncias práticas, de interesse para a engenharia, a formulação mais adequada e conveniente do ponto de vista prático é aquela em que os sinais são vistos como vectores de um espaço vectorial de dimensão finita. Nesta situação, uma decomposição abeliana refere-se à decomposição em sinais cuja soma vectorial reconstrói o sinal original, sendo sempre possíveis inúmeras decomposições para o mesmo sinal.

A decomposição EMD

Como justamente visto, para sinais discretos existem muitas formas de realizar decomposições abelianas. Estas dividem-se por dois grandes grupos. Um desses grupos é o das decomposições por funções de base pré fixadas, como as decomposições de Fourier (Oppenheim-1999) ou Walsh (Higgins-1977) (Stoffer-1991). O outro é o das decomposições por características dos dados, como a ICA (*Independent Components Analysis*) (Hyvärinen-2000), PCA (*Principal Components Analysis*) (Jolliffe-2002) ou a EMD (*Empirical Mode Decomposition*) (Ortigueira-2004).

A decomposição em modos empíricos, "*Empirical Mode Decomposition*", (EMD) surgiu na NASA em finais da década de 90 do séc. XX (Huang-1998). A EMD foi desenvolvida para a decomposição, em componentes mais simples e fáceis de interpretar, de sinais que oscilam em torno de uma tendência, mas que possuem características não estacionárias. Este é o caso de muitos sinais, como os biológicos, climáticos, econométricos, para referir apenas alguns. Como se referiu e contrariamente ao habitual, a EMD não tem uma definição analítica, mas apenas algorítmica e tão-somente para sinais finitos em tempo discreto.

A EMD é efectuada por meio de um algoritmo intrinsecamente discreto e de características locais, não se encontrando desenvolvida nenhuma contrapartida analítica. É um algoritmo considerado “simples” e “natural” (Ortigueira-2004).

I.2 - Panorama do trabalho desenvolvido

A ideia da realização deste trabalho surgiu a partir de investigações efectuadas sobre a **decomposição em modos empíricos** (Empirical Mode Decomposition - EMD) (Ortigueira-2004), (Rato-2005), (Rato-2008). O estudo aprofundado feito sobre a EMD permitiu sentir e identificar as dificuldades que se colocam, na prática, quando se procuram realizar decomposições deste tipo. Este trabalho procura contribuir para o lançamento de algumas indagações promitentes para a solução das dificuldades encontradas.

Revisitemos e aprofundemos melhor alguns aspectos da decomposição EMD. Em termos muito gerais, como referido, as decomposições abelianas permitem decompor um sinal em várias componentes cuja soma resulta na reconstrução do sinal. Também como referido, existem muitos tipos de decomposições abelianas, que se repartem por dois grandes grupos:

a) O das decomposições com funções de base pré fixadas, como as decomposições de Fourier ou de Walsh.

b) As decomposições por características dos dados, como a ICA (Independent Components Analysis), PCA (Principal Components Analysis) ou a EMD (Empirical Mode Decomposition).

A decomposição EMD é uma decomposição abeliana empírica por características dos dados pois não utiliza funções de base pré fixadas. O algoritmo de decomposição EMD é intrinsecamente discreto e, como se afirmou anteriormente, não tem uma definição analítica, mas apenas algorítmica. Tal coloca dificuldades formais, especialmente no início e fim do sinal pois aí não estão presentes as amostras requeridas pelo algoritmo para funcionar correctamente. Estas dificuldades foram motivadoras para investigações sobre as implicações formais da ausência de amostras no processamento de sinais. Note-se no entanto que, quase sempre, estas problemáticas são transversais e comuns a todos os processamentos de sinais de duração limitada.

Na perspectiva adoptada neste texto, o processamento de sinais consiste numa elaboração de operações matemáticas sobre os valores das amostras, dos dados. Fomaliza-se a ausência de amostra, a ausência de dado, pela ausência de valor presente à operação.

Uma problemática semelhante, que não tem uma formulação analítica mas apenas algorítmica, é sobre a forma mais adequada de lidar com a ausência de informação que emerge nos sistemas, tipo SQL, de manipulação e armazenamento de dados. Sendo assim, o núcleo fundamental desta investigação consistiu em procurar responder à questão: “Como definir adequadamente operações tolerantes à ausência de valores?”

I.2.1 - Tarefas desenvolvidas e resultados obtidos

Como visto, a causa central para este trabalho proveio da constatação de que para lidar matematicamente com os sinais é necessário definir como operações matemáticas as manipulações e processamentos realizadas. Acontece que, muitas vezes, é necessário trabalhar com a ausência de dados, donde se revela de interesse procurar definir formalmente o arquétipo para as operações tolerantes à ausência de dados. Esse arquétipo, como se verá, é identificado com o produto urcartesiano.

Esta procura de formalização desenvolveu-se por várias tarefas, onde foram elaborados novos conceitos, como o de urconjunto e urdomínio, e desenvolvidas técnicas como a da modificação da numeração de Matula, o que levou à obtenção de vários resultados, como o pseudo polinómio de pertença e o produto urcartesiano. São estes resultados que o presente texto pretende expor.

I.2.1.1 - A motivação

Começa-se, no capítulo. II, por examinar a decomposição EMD, motivadora prática deste trabalho. Aí são identificados alguns problemas associados à EMD, nomeadamente os relativos à estimação dos extremos e das envolventes. É sabido que são muitas as formas pelas quais é possível decompor abelianamente um dado sinal concreto. Mas nem todas essas decomposições podem ser chamadas de EMD. Com o intuito de alicerçar em termos absolutamente gerais o que deve ser entendido como uma EMD, são elaborados os princípios guia de qualquer EMD, Uma vez que não é conhecida nenhuma formulação analítica, estes princípios permitem examinar e conferir se uma dada decomposição abeliana de um sinal pode ser, ou não, considerada uma EMD. Fica pressuposto que todos os programas de decomposição EMD, em qualquer linguagem e/ou plataforma, têm de produzir resultados que cumpram o exigido por estes princípios para que a decomposição se possa considerar uma EMD. Pode afirmar-se que todos os programas desenvolvidos no âmbito deste trabalho, mas

apenas alguns dos disponibilizados por outros autores e referidos como EMDs, cumprem as exigências dos princípios expostos.

Com base nestes princípios e no conceito de sinal ileso, onde pela primeira vez aparece a necessidade de contabilizar a possibilidade de ausência de valor numa amostra, são formalizadas as funções classificativas baseadas na vizinhança de cada amostra de um sinal ileso. Duas consequências são notórias. Uma delas é que, partindo apenas da descrição elaborada por Huang em 1998, são possíveis várias funções classificativas, pelo que Huang não define o algoritmo de forma única. A escolha e utilização de cada uma dessas funções classificativas originará diversos algoritmos EMD, todos eles válidos. No entanto, para um mesmo sinal, a aplicação de cada um destes algoritmos originará EMDs distintas. A outra consequência é que é possível criar algoritmos que gerem pontos fiduciais cujo índice amostral é intercalar, não inteiro. Ou seja, o domínio dos pontos fiduciais não é um subconjunto do domínio das amostras do sinal.

Acontece que se verifica que todas as funções classificativas têm de lidar com as extremidades do sinal, extremidades essas entendidas no sentido de primeiras e ultimas amostras na serialização temporal. Quando tal acontece, não existem amostras, no domínio de definição do sinal, disponíveis para alimentar como argumentos as funções classificativas, ou outras. Ou seja, existem situações em que as funções classificativas, ou outras, não podem actuar por não tolerarem a ausência de um argumento. Este problema é geral, no sentido em que a ausência de dados pode surgir em qualquer localização e não tão somente nas estremidades, recorrente e transversal a muitas situações em análise e processamento de sinais. A solução procurada deverá igualmente ser geral e amplamente transversal. Por isso procura-se estipular teoricamente o que é uma operação tolerante, em lugar de casuisticamente aplicar uma solução ad-hoc.

Como exemplo de solução ad-hoc refira-se o costume empírico de postular que o argumento em falta tem o valor zero e prosseguir. Mas é possível lidar formalmente com esta ausência de argumento, de tal forma que, nestas situações, a atribuição do valor zero seja reconhecidamente um acto empírico e não uma inescapável imposição teórica. Esta problemática da tolerância à ausência de dados, de características globais e transversais, está na raiz das considerações teóricas que são elaboradas no seguimento. Os próximos capítulos desenvolvem e aprofundam essas considerações, sob uma perspectiva finitista - construtivista da computação enquanto actividade mediada simbolicamente.

I.2.1.2 - Símbolos e computação

No capítulo III, para situar adequadamente os problemas levantados pelo adequado tratamento da ausência de dados nos argumentos de quaisquer funções, é pressuposto um modelo computacional de base simbólica, no qual é desenvolvido o conceito de tolerância, enquanto tolerância à ausência de símbolo. Sendo assim a tolerância computacional à ausência de dados é equacionada a partir da ausência de símbolos.

Aqui é chamada a atenção para as origens percepcionais do conceito de símbolo, na sua concepção semiótico-computacional. A notação, indissociável do símbolo, é analisada e desenvolvida. semioticamente inovadora, é de que

Duas coisas importam reter:

O desenvolvimento de novas notações, quando necessário, vai obedecer aos princípios da continuidade expressiva, da exaustão e da simetria vertical para as situações comutativas.

É necessário um símbolo para representar a ausência de símbolo. Isto pode ser visto como uma extensão semiótica. Esse símbolo é postulado como sendo '$\hat{\emptyset}$'. Uma das razões de escolha deste símbolo é o seu caracter inédito. Outras prendem-se com a sua simetria, uma certa sugestividade intuída e, por fim, alguma facilidade de obtenção tipográfica.

I.2.1.3 - Necessidade da lógica trivalente

No capítulo IV é alegado que, para lidar correctamente com a tolerância, abstraída na ausência de símbolo, a lógica envolvida não pode ser a bivalente, devendo ser, pelo menos, a trivalente. É esclarecido que uma lógica trivalente é suficiente, não sendo necessárias lógicas de grau superior ou mesmo “*fuzzy*”. É exemplificado como se utiliza uma lógica trivalente. Primeiramente enquanto combinatória de trivalores. Seguidamente, visto que não pode ser desenvolvido um cálculo booleano como na lógica bivalente, mostra-se como um certo conjunto de funções é funcionalmente completo. Com base neste conjunto funcionalmente completo é explicado como é possível sintetizar o circuito trivalente correspondente a qualquer tabela de triverdade e de como. a partir de um circuito trivalente qualquer, é possível obter a respectiva tabela de verdade. Com estes resultados torna-se possível abordar as questões relacionadas com a semântica trivalente. Nesse sentido, são referidas algumas semânticas trivalentes e ensaia-se a sua aplicação à presente problemática. Esta aplicação constitui o principal resultado obtido neste capítulo, pois permite definir e aplicar o conceito de igualdade tolerante.

I.2.1.4 - Conjuntos e Urconjuntos

No capítulo V é apresentada a teoria clássica dos conjuntos, que vai servir de fundamento a múltiplos desenvolvimentos teóricos.

O capítulo VI é o capítulo onde se encontra o núcleo desta tese: urconjunto e pseudo polinómio de pertença. Nesse capítulo é apresentado, a partir do conceito clássico de urelemento e do conceito de urexpressão, o novo conceito de urconjunto.

Partindo deste conceito surge uma cascata de outros conceitos: urdomínio, urcardinalidade, uramontoado, urexpressãoNR e compartimentação de um urconjunto. A partir da compartimentação é investigada a numeração de Matula e desenvolvida uma generalização que permite definir urisomorfismos e pseudo-polinómios de pertença (ppp). Este conceito de ppp, aqui introduzido, facilita o lidar formalmente com as ausências de símbolo nas urexpressõesNR.

I.2.1.5 - Dos tuplos tolerantes aos sinais discretos

No capítulo VII os conceitos, baseados no ppp, de dupla tolerante e tuplo tolerante com as normas respectivas serão apresentados e desenvolvidos. Será elaborada a distinção entre comprimento, tamanho ocupação, amplitude vagos e magnitude capacidade de um tuplo. É refinado o que é uma concatenação de tuplos e o que é uma projecção.

Estes conceitos, de dupla tolerante e de tuplo tolerante, permitem definir o conceito de produto cartesiano com tolerância, o urcartesiano. É com base neste produto urcartesiano que será possível avançar para as definições de relações e operações tolerantes e de outras estruturas algébricas incorporando a possibilidade de tolerância.

No capítulo VIII, o conceito de urcartesiano é o suporte para a definição de relação tolerante e finalmente de sinal discreto que se define como relação tolerante indexada.

I.2.2 - Conclusões e perspectivas

Finalmente, no capítulo IX são enumeradas as conclusões e apontadas linhas para investigação futura, cujo teor é apresentado já de seguida.

I.2.2.1 - Conclusões

Para lidar com a resolução dos problemas empíricos motivados pela EMD, e de uma forma geral e transversal a outros tipos de manipulações de sinais, foi elaborada uma

definição de vizinhança sequencial em sinais discretos, com base na qual foram desenvolvidas funções classificativas para máximos e mínimos. Estas funções classificativas, tal como definidas, não são tolerantes a falhas, não são tolerantes à ausência de um argumento, embora o necessitem. Esta problemática da necessidade de tolerância está na raiz das considerações teóricas desenvolvidas posteriormente, numa perspectiva finitista - construtivista da computação enquanto actividade mediada simbolicamente.

Foi realizada a apresentação, quer dos símbolos e sua utilização, quer da ausência de símbolo e sua utilização, enquanto suportes de toda a computação. Considerou-se que para lidar correctamente com a tolerância, consequente da ausência de símbolo, a lógica envolvida deverá ser pelo menos a trivalente. Desta forma, sempre que for necessário trabalhar com operações tolerantes em geral e igualdades tolerantes em particular, é necessário considerar tal computação num contexto de lógica trivalente.

Foi desenvolvida a definição de urconjunto, instrumento para a definição de operações tolerantes. Para isso aplicou-se uma numeração de Matula modificada para definir o ppp (pseudo polinómio de pertença). Com base no ppp definiu-se o conceito de dupla ordenada com tolerância e prosseguiu-se para a definição dos tuplos tolerantes e das suas propriedades. Finalmente, atingiu-se a definição de produto cartesiano com tolerância, de forma permitir desenvolver a teoria das estruturas algébricas incorporando a possibilidade de tolerância. De acordo com a perspectiva desenvolvida, os sinais discretos são relações tolerantes indexadas.

I.2.2.2 - Perspectivas para investigação futura

É costume, nas questões práticas, postular que o argumento em falta tem o valor zero e prosseguir. No entanto é possível lidar formalmente com esta ausência, de tal forma que, nestas situações, a atribuição do valor zero seja reconhecidamente um acto empírico e não uma imposição teórica. Esta problemática da tolerância à ausência de dados, de características globais e transversais, está na raiz das considerações teóricas cuja elaboração teve lugar neste texto. Muitas mais elaborações são ainda necessárias e possíveis de fazer no sentido de desenvolver o formalismo tolerante e o correspondente processamento de sinais.

Quanto à EMD, o desenvolvimento do conceito operacional de extremo de um sinal discreto baseado em funções de vizinhança variável e não fixa como foi descrito, é algo que carece de trabalho complementar. Relativamente à determinação das envolventes cumpre referir que são possíveis diferentes algoritmos que permitem garantir a característica de envolvente sem obrigar à tangencia obrigatória com o extremo discreto.

Quanto à lógica trivalente, uma revisão de literatura (2010) permitiu identificar como muito promissora a investigação relativa à simplificação das funções lógicas com trivalores, nomeadamente, na generalização dos mapas de Veitch - Karnaugh para variáveis trivalentes.

Quanto à álgebra tolerante, é necessário prosseguir com o desenvolvimento teórico da teoria das operações tolerantes, quer totais, quer parciais. Só posteriormente é que será possível desenvolver a teoria dos espaços vectoriais tolerantes, teoria essa incontornável para lidar correctamente do ponto de vista teórico com operações tolerantes envolvendo sinais.

Finalmente, é de referir que a emergência da tolerância pode ser vista como tendo implicações a nível da axiomática da teoria das probabilidades. Tal constitui a derradeira sugestão para investigações futuras.

I.3 - Notação e convenções associadas

O desenvolvimento de qualquer argumentação matemática é fortemente dependente da notação disponível. Por isso este capítulo I termina dedicando-se à questão da notação e convenções utilizadas neste texto.

Consiste a notação no conjunto das convenções gráficas convenientemente partilhadas por todos os leitores de modo a permitir a comunicação interlocutória. Desde sempre que actividade matemática se apoiou em notações, mas nunca, nem mesmo actualmente, se desenvolveu uma notação comum e universal (Cajori-1991). Como exemplo ilustrativo considere-se o habitual e corriqueiro número quatro, que é escrito "*four*" noutra língua, e cuja correspondente notação também varia, podendo ser 4 , ٤, ou mesmo四, para não referir formas clássicas de o representar, como IV.

As representações simbólicas de outras entidades, que não os meros números, constituem exemplos actuais da mítica Babel. É um facto que muitos textos, ainda que na mesma língua, do mesmo ano e versando os mesmos assuntos, exprimam de forma distinta entidades como vectores, conjuntos, funções, etc., …. É por isso que, em muitos deles, para obviar aos desajustes de entendimento provenientes de uma deficiente partilha das convenções subjacentes à notação exibida, é apresentada uma resenha da notação e concomitantes convenções. Tal prática também aqui vai ser exercida.

No sentido de facilitar o adequado entendimento deste texto, começam-se por apresentar as convenções relativas à nomenclatura dos sinais gráficos utilizados na elaboração deste

texto. Para a utilização em expressões de índole matemática, são consideradas como suficientemente conhecidas por todos os leitores as letras dos alfabetos grego e latino bem como os diversos aspectos que os seus glifos podem apresentar.

Seguidamente é apresentada uma breve lista nominativa de símbolos gráficos não alfabéticos que são utilizados neste texto. Nos casos em que o mesmo símbolo é referido de formas diversas, a nomenclatura preferencial é a apresentada em primeiro lugar.

I.3.1 - Parêntesis / Parêntese / Parênteses

A forma «parêntese» é singular; «parênteses» é plural. Já «parêntesis», forma igualmente correcta, é singular e plural: «o parêntesis», «os parêntesis».

( )	Parêntesis, parêntesis curvos.
[ ]	Parêntesis rectos, colchetes, grampos, ou agrafes.
{ }	Chavetas, chaves ou braças.
⟨ ⟩	Parêntesis angulosos, cotovelos ou chevrons.

I.3.2 - Aspas e afins

« »	Aspas angulares duplas, aspas tradicionais.
‹ ›	Aspas angulares simples
“ ”	Aspas curvas duplas.
‘ ’	Aspas curvas simples.
" "	Aspas rectas duplas.
' '	Plicas, ou aspas rectas simples.
'	Apóstrofe recta, plica isolada.
’	Apóstrofe curva, aspa simples curva direita isolada.

I.3.3 - Outros sinais utilizados

;	Ponto e vírgula.
,	Vírgula.
·	Ponto, ponto simples

$\circ$ Ponto oco, ponto vazio, pequena circunferência.

$\bullet$ Ponto cheio, pequeno círculo negro.

: Dois pontos.

$\ldots$ Reticências.

$\vdots$ Reticências verticais, três pontos

$.\cdot^{\cdot}$ Reticências inclinadas, ou reticências diagonais secundárias

$\ddots$ Reticências contra inclinadas, ou reticências diagonais principais

| Barra vertical

/ Barra inclinada, ou barra diagonal secundária

\ Barra contra inclinada, ou barra diagonal principal

$\rightarrow$ Seta simples

$\mapsto$ Seta apoiada

Termina aqui esta breve lista, sem obviar no entanto a que outros símbolos porventura necessários sejam devidamente apresentados aquando da sua introdução.

I.3.4 - Indicadores de circunstância

Os indicadores de circunstância salientam e numeram diversos aspectos conjunturais do texto. São rodeados por parêntesis rectos, começam por uma letra que indica o tipo de indicador e terminam num campo numérico que contém um ponto. Os dígitos antes do ponto indicam o capítulo e depois indicam o número de ordem dentro do capítulo. Os indicadores de circunstância são:

[Dx.xx] Este indicador é utilizado para as definições. Quando apropriado, o objecto da definição é salientado a **negrito**.

▲: Indica o fim da definição.

[nDx.xx] Este indicador é utilizado para uma recusa de definição, para uma não-definição.

▲: Indica o fim da recusa de definição.

[Ex.xx] Este indicador é utilizado para os exemplos.

▼: Indica o fim do exemplo.

[Tx.xx] Este indicador é utilizado para os teoremas.

Como subindicadores opcionais, têm-se:

P: Indica um esboço da prova, da demonstração.

H: Indica a Hipótese do teorema.

T: Indica a Tese do teorema.

D: Indica a Demonstração do teorema.

■: Indica o fim do teorema

Apresenta-se agora um indicador utilizado quando existem desenvolvimentos pertinentes e interessantes para um determinado assunto, mas que a exiguidade de espaço inibe o adequado desenvolvimento.

[Sx.xx] Este indicador é utilizado para sinalizar um “Stop”. Um “Stop” é uma elucidação da não prossecução das considerações. Cada um é devidamente explicado, na altura que surge.

♦: Indica o fim do “Stop”.

I.4 - Conceitos e conhecimentos pressupostos

De uma forma muito abstracta e geral, um sinal discreto é visto como um conjunto de relações que obedecem a certas condições indexantes. Por sua vez, como se verá, cada relação é um conjunto de tuplos.

Saliente-se que os termos “conjunto” e “relação” deverão ser entendidos no sentido matemático usual do termo e não no sentido informal da linguagem quotidiana. De igual modo devem ser entendidos todos os outros termos constantes no léxico matemático habitual referido às grandes áreas da Álgebra, do Cálculo clássico, da Lógica Simbólica e da Computação Formal. Estas considerações constituem o resumo dos pressupostos gerais.

Nesta ordem de ideias, consentâneos nos pressupostos gerais, amparos para a correcta leitura deste texto, são considerados como adquiridos os seguintes conhecimentos:

a) Os conceitos primitivos de existência, símbolos, transformação, correspondência, escolha, colocação e pertença.

b) Os habituais conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, as suas possíveis sequências, a sua manipulação algébrica e os elementos gerais do Cálculo. Notar que é considerado que qualquer elemento desses conjuntos é finito.

c) Os rudimentos da geometria, incluindo o léxico “ponto”, “recta”, “círculo”, “plano”, “dimensão” e teoremas mais comuns.

d) A distinção entre conjuntos e elementos de um conjunto, a distinção entre pertencer e estar incluído, o conhecimento do conjunto potência 2^A para um conjunto A, o conjunto potenciado ou expoente, bem como o conhecimento da álgebra das operações de intersecção, união e negação de conjuntos e da correspondência entre elementos de um ou mais conjuntos. As notações equivalentes para o conjunto vazio, ou nulo: $\{\}$ e $\varnothing$. A distinção entre conjunto singular ou singletão, $\{\omega\}$, e o seu elemento, ω. A notação $\#A$, para representar a cardinalidade de A.

e) Os rudimentos da teoria das linguagens formais, incluindo o léxico “símbolo”, “caractere”, “fiada” ou *string* (sequência de símbolos), “subfiada”, “expressão”, “linguagem” e respectivos aceitadores linguísticos enquanto dispositivos computacionais. Para salientar que determinada sequência de símbolos é para ser encarada preferencialmente apenas como uma fiada e não como outras expressões com as concomitantes interpretações, são usadas aspas rectas duplas, como em $"abc"$. Também é pressuposto o conhecimento da distinção entre fiadas iguais e fiadas diferentes, da operação de concatenação ou encadeamento de fiadas, representada por $\nparallel$, a notação $""$ para a fiada vazia, ou nula, a notação $\breve{\#}\mathbf{s}$, ou $|\mathbf{s}|$ para o número de símbolos, incluindo repetições, presentes numa fiada $\mathbf{s}$, também referível como o comprimento da fiada, e a notação $\breve{\#}_{\alpha}\,\mathbf{s}$ ou $|\mathbf{s}|_{\alpha}$ para o número de ocorrências do símbolo $'\alpha'$ na fiada $\mathbf{s}$.

f) Os rudimentos da teoria dos grafos e digrafos, incluindo o léxico “nó”, “aresta”, “arco”, “bipartido”, “árvore”, “caminho” e “atalho”. Também é pressuposto o conhecimento da definição de grafos iguais e grafos diferentes.

g) O conceito de par ordenado, (a,b) e a sua definição em termos de par de Kuratowsky, $\{\{a\}\{a\,b\}\}$, bem como o conceito de produto cartesiano, $\times$. O termo “aridade”, neologismo erudito relacionado com a noção de pluralidade, que designa o número *n* de elementos que compõem as n-uplas ordenadas, ou tuplos, pertencentes a uma relação. De igual forma, a aridade de um produto

cartesiano é o número natural que representa a quantidade de conjuntos, com as repetições incluídas, que intervêm na sua construção. No caso de funções, este termo indicará o número adequado de argumentos ou operandos.

h) Os valores lógicos V e F, referidos como valores booleanos, ou bivalores, as operações clássicas da lógica proposicional a dois valores, também referida por lógica bivalente ou bilógica, como a negação, $\neg$, a disjunção ou soma lógica, $\vee$, e a conjunção ou produto lógico, $\wedge$. Será utilizada a notação $(: expr :)$ para representar a determinação do valor lógico (bivalente) de $expr$. Será utilizada a notação $(\vdots expr \vdots)$ para representar a determinação do valor lógico (trivalente) de $expr$.

i) Os quantificadores, quer o universal, $\forall$, de leitura “para todo e qualquer”; quer o existencial, $\exists$, cuja leitura é “existe pelo menos um”.

A abreviatura “sse” para “se e só se”.

A convenção informal do uso de reticências, como em $\mathbb{N} = \{1\ 2\ 3\ 4 \cdots\}$.

Finalmente apresenta-se a sigla OEIS™, como referência padrão à e-enciclopédia de sequências de inteiros, a “The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™”, cujo endereço Internet é actualmente (2011) “`http://oeis.org/`”, tendo sido durante muito tempo “`http://www.research.att.com/~njas/sequences/`”.
Esta enciclopédia pretende matricular todas as sequências de inteiros, apresentando as matrículas a forma geral Annnnnn.

Deve ser entendido que a lista anterior não é exaustiva. Oportunamente e de acordo com a conveniência expositiva, serão referidos outros termos e esclarecimentos cujo conhecimento também é pressuposto.

Finalmente, convém notar o seguinte

[SII.01] Na apresentação das definições foi estritamente cumprido o cânone matemático de almejar a sua consistência formal. Foi também ambicionada a maximização da comunicação efectiva com o leitor deste texto. Por isso, não foi aplicado o princípio minimalista de colocar na definição apenas o essencial independente, recorrendo-se de forma comedida a alguma redundância para facilitar a

comunicação. Desta forma surgem ao nível das definições algumas propriedades dedutíveis a partir de definições minimalistas. ♦

I.5 - Pormenores da notação relativa a sinais discretos

Os sinais discretos são entendidos como conjuntos de dados. Por isso são representados preferencialmente por letras maiúsculas, latinas ou gregas, como S ou Φ. No entanto, constitui prática comum referir os elementos destes conjuntos como amostras. Refira-se que tal prática continua a ser habitual mesmo quando os dados não são provenientes de um processo amostral. A ela aderiremos. Por isso no seguimento iremos preferencialmente falar de «amostras» em lugar de «dados»

Por sua vez, cada amostra é entendida como sendo formada por um índice e um valor. Os índices costumam ser elementos de $\mathbb{Z}$, não podendo existir duas amostras com o mesmo índice. Os valores costumam ser elementos de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$, podendo existir várias amostras com o mesmo valor.

A letra que representa o índice é latina, minúscula e situada a meio do alfabeto. Normalmente será uma destas: i, j, k, l, m, n, o, p, embora a letra o tenha uma utilização reservada, como se verá.

O valor de uma amostra é preferencialmente representado pela minúscula da letra que representa o sinal. Sendo assim, s representa o valor de uma amostra do sinal S.

Para representar uma dada amostra é necessário indicar quer o valor, quer o índice. Para isso, escrevem-se os dois justapostos, com o valor à esquerda e com o índice à direita devidamente marginado por parêntesis rectos. Assim, sendo o sinal X, vem que $x[n]$, representará uma amostra, cujo valor é x e cujo índice é n.

Um conjunto de amostras será escrito como $\{\cdots x[n]\cdots\}$, ou mais simplesmente como $\{x[n]\}$. Pelo que se tem $X=\{x[n]\}$, ou seja que um sinal X é um conjunto de amostras $x[n]$.

Notar como a notação $x[n]$ permite intuir uma relação funcional $n \mapsto x$, o que é consentâneo, uma vez que não podem existir duas amostras distintas com o mesmo índice. Além disso é sempre possível sequenciar o conjunto das amostras aproveitando uma relação de ordem total que seja propiciada pelos índices. Sendo assim, é possível falar de primeira amostra, segunda amostra,..., última amostra, ou seja, fica definida uma numeração ordinal

para as amostras. Na esmagadora maioria dos casos de interesse prático, tal sequenciação é tão habitual, surge de forma tão natural e ajusta-se tão bem à realidade subjacente, que é tentador considerá-la obrigatória, pelo que um sinal discreto é visto simplesmente como uma sequência de amostras, ou seja, é visto como um conjunto de amostras no qual está definido uma relação de ordem total.

Desta forma, um sinal $X = \{x[n]\}$ é visto como um conjunto de amostras totalmente ordenadas pelos índices.

Convém chamar a atenção para os seguintes pontos:

Quando não há perigo de confusão entre um sinal e uma sua amostra, é prática usual que um sinal $\{x[n]\}$ seja representado simplesmente como $x[n]$.

Chama-se número de amostras, N, ao cardinal de X, ou seja: $N = \#X$.

É habitual supor que os N valores distintos exibidos pelo índice exibem espaçamento regular e unitário. Quer isto dizer que se o menor dos índices for um, então serão todos naturais e o maior será N. Tal facto é expresso pela expressão condicional $(1 \leq n \leq N) \wedge (n \in \mathbb{N})$. Pelo que o índice da primeira amostra é um, o índice da segunda amostra é dois, e assim por aí em diante, ou seja, a numeração ordinal corresponde directamente ao índice. Também quer dizer que se o menor dos índices for zero, então também serão todos inteiros e sempre inferiores a N. Tal facto é expresso pela expressão condicional $(0 \leq n < N) \wedge (n \in \mathbb{N}_0)$. Pelo que o índice da primeira amostra é zero, o da segunda é um e assim por aí em diante, ou seja, a numeração ordinal já não corresponde directamente ao índice. Posto isto, convém realçar que a situação em que a numeração ordinal corresponde directamente ao índice só pode ocorrer na situação particular em que os índices obedecem à expressão condicional $(1 \leq n \leq N) \wedge (n \in \mathbb{N})$.

Além disso e como se verá, os índices podem exibir espaçamentos nem regulares, nem sequer inteiros. Nessas situações é, neste texto, preferencialmente utilizada a letra o para indicar o índice. Assim num sinal como $B = \{b[o]\}$ é de esperar que índice não seja regular e, possivelmente, nem inteiro.

II - Sobre a decomposição em modos empíricos

Como se viu, a classe das importantíssimas decomposições abelianas de um sinal permitem decompor um sinal em várias componentes cuja soma resulta na reconstrução do sinal. A decomposição EMD é uma decomposição abeliana.

II.1 - Tipos de decomposições abelianas

Existem muitas formas de realizar decomposições abelianas, que se dividem em dois grandes grupos:

a) O das decomposições por funções de base pré fixadas, como as decomposições de Fourier ou de Walsh.

b) As decomposições por características dos dados, como a ICA (Independent Components Analysis), PCA (Principal Components Analysis) ou a EMD (Empirical Mode Decomposition).

Como exemplo saliente de decomposição no primeiro grupo, tem-se a análise de Fourier, em que as funções de base são exponenciais complexas. Como exemplo recente de decomposição no segundo grupo, tem-se a decomposição em modos empíricos, ou EMD.

II.1.1 - A decomposição harmónica

Constituindo-se como caso paradigmático da decomposição de um sinal por funções de base pré fixadas, a decomposição de Fourier é bem conhecida, (Ortigueira-2005), (Oppenheim-1999). Para um sinal discreto X com N amostras, que mais não é do que uma sequência com N valores que pode ser visto como um vector a N dimensões, a decomposição de Fourier produz uma sequência C de N coeficientes complexos, $C=\{c[k]\},\ 0\leq k<N$, aos quais correspondem N sinais sinusoidais, $S_k,\ 0\leq k<N$, cada um com N amostras, $S_k=\{s_k[n]\}$, $0\leq n<N$. A soma destas N sinusóides reconstrói o sinal original.

Veja-se como. Seja $X=\{x[n]\},\ 0\leq n<N$, um sinal discreto com N amostras. Então os coeficientes $c[k]$ virão dados por $c[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$. Note-se que esta fórmula

pode ser vista como representando cada $c[k]$ como resultante do produto interno entre o vector X e um vector $\Psi_k = \{\psi_k[n]\}$, tendo-se que $\psi_k[n] = \frac{1}{N} e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$. Estes N vectores $\psi_k[n]$ são as funções de base pré definidas, que são todas ortogonais entre si.

A decomposição de Fourier pode ser vista como a projecção do sinal X na exponencial complexa que constitui cada uma das funções de base. Em vez de exponenciais complexas, é possível lidar com sinusóides. Para isso convencione-se que $c[N] \equiv c[0]$, e definam-se:

quer: $a[k] = \frac{c[k] + c[N-k]}{2}$, $0 \le k < N$,

quer: $b[k] = j \frac{c[k] - c[N-k]}{2}$, $0 \le k < N$.

Os valores $s_k[n]$ são obtidos por: $s_k[n] = a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{N} n\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{N} n\right)$

Tem-se que o sinal X pode ser reconstruído pelo soma das N sinusóides S_k. Ou seja, tem-se que $X = \sum_{k=0}^{N-1} S_k$.

II.1.1.1 - Um exemplo da decomposição de Fourier

[EII.01] Considere-se $N = 16$, e seja X o sinal correspondente à sequência $[1,3,-1,4,5,-1,-8,-3,1,5,8,2,-4,-7,-1,2]$, tendo-se pois que $x[0] = 1$, $x[1] = 3$, ..., $x[15] = 2$. A representação gráfica desta sequência é:

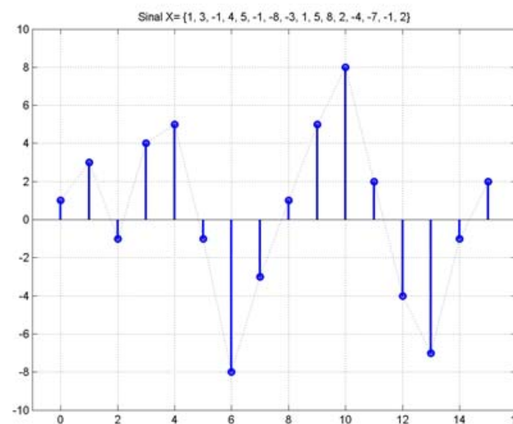


Fig. II.1 Representação de uma sequência

Como se viu, a esta sequência pode aplicar-se a decomposição de Fourier, quer em coeficientes $c[k]$, quer nos correspondentes coeficientes $a[k]$ e $b[k]$, obtendo-se as seguintes N sinusóides S_k :

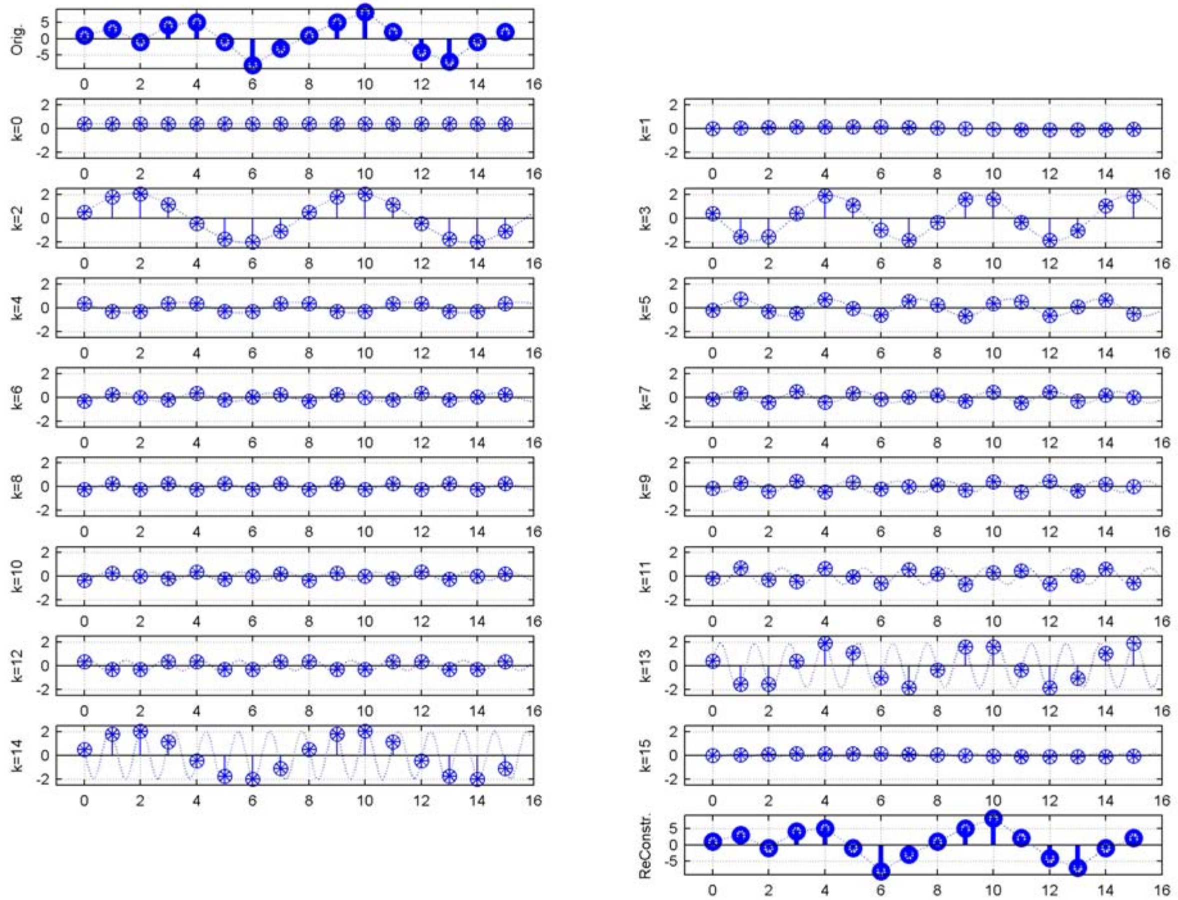


Fig. II.2: Decoposição harmónica

Notar que o primeiro diagrama, em cima à esquerda, representa a sequência original e que o último diagrama, em baixo à direita, representa a sequência reconstruída pela soma das 16 componentes sinusoidais intermédias. O erro residual de reconstrução é desprezável. ▼

II.1.2 - A decomposição em modos empíricos

Como exemplo recente de uma decomposição que não utiliza funções de base pré fixadas refira-se a decomposição EMD (Huang-1998). Esta decomposição origina vários modos

oscilantes empíricos de média nula, $\varphi_i(t)$, convencionalmente chamados IMF (*Intrinsic Mode Functions*), funções de modo intrínsecas, que podem no entanto ser interpretadas como sinais AM/FM de portadora sinusoidal: $\varphi_i(t) = A_i(t)\cos(\theta_i(t))$, cujas envolventes são simétricas (Ortigueira-2004). Para além de um conjunto de IMFs, a EMD origina também um sinal residual, apelidado ***trend***, onde se encontra a informação de média e tendência.

A EMD foi desenvolvida para a decomposição de sinais que oscilam em torno de uma tendência mas que possuem características não estacionárias. Este é o caso de muitos sinais, como os biológicos, climáticos, econométricos, para referir apenas alguns. Contrariamente ao habitual, a EMD não tem uma definição analítica, mas apenas algorítmica e tão-somente para sinais finitos em tempo discreto. Será assim mais adequando falar da IMF $\Phi_i = \{\varphi_i[n]\}$ do que na IMF $\varphi_i(t)$.

As IMFs são determinadas por meio de um algoritmo iterativo chamado "***sifting***", peneirar, (Huang-1998), de características locais e que não utiliza funções de base pré fixadas. Este algoritmo permite obter uma colecção de IMFs $\Phi_i \;\; 0 < i < I$, e um *trend* residual Φ_I. A sua descrição pormenorizada será efectuada já na próxima secção «II.2 - Apresentação sistemática da EMD».

Veja-se agora um exemplo.

II.1.2.1 - Um exemplo da decomposição EMD

[EII.02] Proceda-se à análise EMD da mesma sequência:

$[1,3,-1,4,5,-1,-8,-3,1,5,8,2,-4,-7,-1,2]$. Obtém-se:

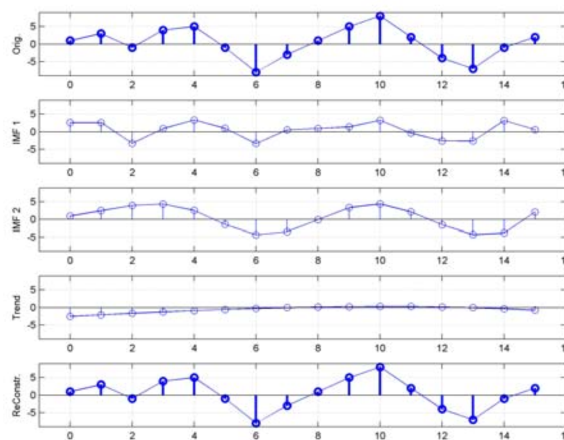


Fig. II.3: Decomposição EMD

Notar que o primeiro diagrama, em cima, representa a sequência original e que o último diagrama, em baixo, representa a sequência reconstruída pela soma das IMFs e do *trend*. O erro de reconstrução residual é desprezável. ▼

Seguidamente procede-se à apresentação sistemática desta decomposição bem como doa problemas identificados

II.2 - Descrição da EMD

A decomposição EMD foi desenvolvida na NASA em finais da década de 90 do séc. XX (Huang-1998). A EMD foi desenvolvida para a decomposição, em componentes mais simples e fáceis de interpretar, de sinais que oscilam em torno de uma tendência mas que possuem características não estacionárias. Este é o caso de muitos sinais de interesse prático, como os biológicos, fisiológicos, meteorológicos, climáticos, econométricos, para referir apenas alguns.

II.2.1 - Descrição geral

A EMD - decomposição em modos empíricos - é efectuada por meio de um algoritmo intrinsecamente discreto e de características locais, não se encontrando desenvolvida nenhuma contrapartida analítica.

A EMD decompõe um sinal nas suas IMFs constituintes. Por IMF entende-se um sinal de média nula e envolventes simétricas. Uma IMF é um sinal passa banda, acomodado a uma interpretação AM/FM.

O algoritmo funciona por refinamentos sucessivos, "peneira" o sinal, até o reduzir a uma IMF. Retira essa IMF ao original e recomeça, considerando o resíduo da operação anterior como um novo original. Termina quando o resíduo for irredutível. É um algoritmo considerado "simples" e "natural", de características locais (Ortigueira-2004).

II.2.2 - O algoritmo

O algoritmo de decomposição EMD é intrinsecamente computacional, não se encontrando desenvolvida nenhuma contrapartida analítica. A descrição do algoritmo é a seguinte:

0) Seja S um sinal em tempo discreto e seja $i = 1$ a variável da iteração.

1) Proceda-se ao *sifting* de S, obtendo-se uma IMF Φ_i. Para isso, seja $\widetilde{S}$ uma cópia auxiliar de S:

1 a) Determinar todos os máximos e mínimos de $\widetilde{S}$.

1 b) Determinar as correspondentes envolventes, $\hat{M} = \left\{ \hat{m}[n] \right\}$ para a envolvente superior, e $\check{M} = \left\{ \check{m}[n] \right\}$ para a envolvente inferior.

1 c) Definir $M = \dfrac{\hat{M} + \check{M}}{2}$, a média das envolventes.

1 d) Para continuar, verifique-se se M cumpre a condição para continuar a iteração. É ela:

- A energia de M é superior a um determinado mínimo.

1 e) Se M não cumprir condição, ou seja se tiver energia desprezável, então termina-se esta parte 1), faz-se $\Phi_i := \widetilde{S}$ e avança-se para 2).

1 f) Se M cumprir a condição, ou seja se tiver energia não desprezável, então vai reinicializar-se esta parte 1).

1 g) Reinicializa-se subtraindo M a $\widetilde{S}$, de forma a obter um novo $\widetilde{S}$. Ou seja, $\widetilde{S} \leftarrow \widetilde{S} - M$. Recomeça-se o processo a partir de 1 a)

2) Defina-se o novo sinal S como sendo $S \leftarrow S - \Phi_i$. Incremente-se a variável de iteração, $i \leftarrow i + 1$.

3) Para o novo S, verifique-se se cumpre ambas as condições para continuar a iteração. São elas:

- Energia acima de um mínimo,
- Exibição de mais do que três extremos.

4) Se S cumprir ambas as condições de iteração, recomece-se a partir de 1). Se S não cumprir pelo menos uma das condições para continuar a iteração, considerar S o *trend* final, Φ_I, e terminar a iteração.

Ficou assim descrito o algoritmo de EMD que permite obter uma colecção de IMFs $\Phi_i \;\; 0 < i < I$, e um *trend* residual Φ_I . Notar que o algoritmo, embora analise a totalidade do sinal, não faz apelo a propriedades globais, uma vez que o que determina as envolventes é a localização dos extremos.

II.2.3 - As IMFs

Esta decomposição origina sinais apelidados modos empíricos oscilantes de média nula, $\varphi_i(t)$, também referíveis como IMF (*Intrinsic Mode Functions*), funções de modo intrínsecas. Por coerência com a literatura internacional é neste texto preferencialmente utilizada a sigla IMF para as referir.

As IMFs costumam ser quase ortogonais entre si e admitem ser interpretadas como sinais passa banda AM/FM de portadora sinusoidal: $\varphi_i(t) = A_i(t)\cos(\theta_i(t))$, cujas envolventes são simétricas (Ortigueira-2004). Isto porque cada IMF constitui-se como um sinal que tem de cumprir o seguinte par α) β) de condições (Huang-1998):

α) O número de extremos e o número de cruzamentos por zero diferem no máximo por uma unidade.

β) Em qualquer ponto o valor médio das envolventes definidas pelos máximos e pelos mínimos é nulo.

Para além de um conjunto de IMFs, $\varphi_i(t) \;\; 0 < i < I$, a EMD origina também um sinal residual, $\varphi_I(t)$, apelidado *trend*, onde se encontra a informação de média e tendência.

Como o EMD não tem uma definição analítica, mas apenas algorítmica e tão-somente para sinais finitos em tempo discreto, é mais adequando falar da IMF $\Phi_i = \{\varphi_i[n]\}$do que na IMF $\varphi_i(t)$.

II.2.3.1 - As IMFs como sinais AM/FM

Na EMD as IMF, embora sem a ortogonalidade garantida, são de interesse fulcral, pois desempenham o papel de funções de base. Embora a EMD seja sempre efectuada por uma algoritmo apenas aplicável a sinais em tempo discreto, uma IMF genérica, tal como definida

por Huang (Huang-1998) é um sinal em tempo contínuo, $\varphi(t)$, que tem sempre de cumprir o par de condições α) β) atrás referido. Note-se no entanto que um sinal contínuo com as envolventes definidas pelos extremos, simétricas e de média nula - condição β) -, acaba sempre por ter de exibir uma diferença máxima de uma unidade entre o número de cruzamentos por zero e o número de extremos - condição α) -.

Constata-se assim que os sinais sinusoidais $\sin(\omega_0 t)$ ou $\cos(\omega_0 t)$ são IMFs, onde ω_0 é uma frequência fixa. Considere-se agora uma função $\varphi(t) = A(t)\cos(\omega_0 t)$, onde $A(t)$ é um sinal de características espectrais tais que a sua frequência máxima é muito inferior a ω_0. Tal função $\varphi(t)$ representa a modulação em amplitude de uma sinusóide, normalmente apelidada «portadora», e também é uma IMF cuja envolvente é $A(t)$, uma vez que verifica as condições α) β). Considere-se agora que a frequência é levemente variável, ou seja que se tem $\omega(t)$ como uma função que evolui suavemente em torno de uma frequência central ω_0, e que $A(t)$ continua a variar lentamente, só que desta feita em comparação com as variações de $\cos(\omega(t)t)$. Nestas condições, tem-se que $\varphi(t) = A(t)\cos(\omega(t)t)$ ainda é uma IMF, pois tem todas as condições para continuar a verificar as condições α) β). Sendo assim, é natural considerar que neste último caso, mais geral, $\varphi(t)$ pode ser vista como um sinal AM/FM, onde a envolvente $A(t)$ modula em amplitude a componente FM representada por $\cos(\omega(t)t)$. Pode concluir-se assim que um sinal AM/FM verifica a definição de IMF. Por outro lado observa-se que todas as IMFs obtidas a partir de sinais concretos podem ser interpretadas como sinais AM/FM.

Cada IMF pode ser decomposta numa componente AM, correspondente à sua envolvente, e numa componente FM, de envolvente constante e que pode ser desmodulada.

II.2.3.2 - IMFs e bancos de filtros

Como se referiu, as IMF são sinais passa banda, de média necessariamente nula, quase ortogonais entre elas, e de cariz AM/FM. As iterações no *sifting* são uma forma de reduzir a dissemelhança entre a envolvente superior e a inferior. Uma vez que as envolventes sejam simétricas, pode considerar-se que se tem um sinal modulado em amplitude e em que a

frequência ω_0 da portadora não é constante. Ou seja, o *sifting* é um processo iterativo que transforma o sinal original num sinal modulado em amplitude (AM) e frequência (FM).

Em termos espectrais observa-se, como seria de esperar, que a banda ocupada pelas envolventes é uma fracção da frequência central ω_0. Também se observa que todas as componentes espectrais inferiores às das envolventes são expelidas pelo processo de *sifting*, sendo reintroduzidas aquando do próximo processo de *sifting*. Em consequência as IMFs são geradas pelo algoritmo por ordem decrescente de frequências centrais. Além disso o algoritmo comporta-se como um banco de filtros (Rato-2008b) (Flandrin-2004b), podendo o resultado final, o conjunto Φ_i de IMFs, ser considerado como uma decomposição tempo frequência.

Tal também justifica o fenómeno de desdobramento de IMFs cujas bandas se sobrepõem. Detalhando, se se adicionarem duas IMFs cujas bandas não se sobreponham, a decomposição EMD irá recuperá-las. Mas se as bandas se sobrepuserem, então irá ser obtida uma colecção de IMFs, diferentes das originais e em maior número.

[EII.03] Exemplo ilustrativo do comportamento da EMD como um banco de filtros (Rato-2008). É sintetizado um sinal com duas mil amostras provenientes da amostragem regular de um processo de ruído branco gaussiano. Tal sinal é submetido à EMD, obtendo-se 10 IMFs. O que é apresentado é o módulo do espectro de cada IMF em unidades lineares e em frequências normalizadas.

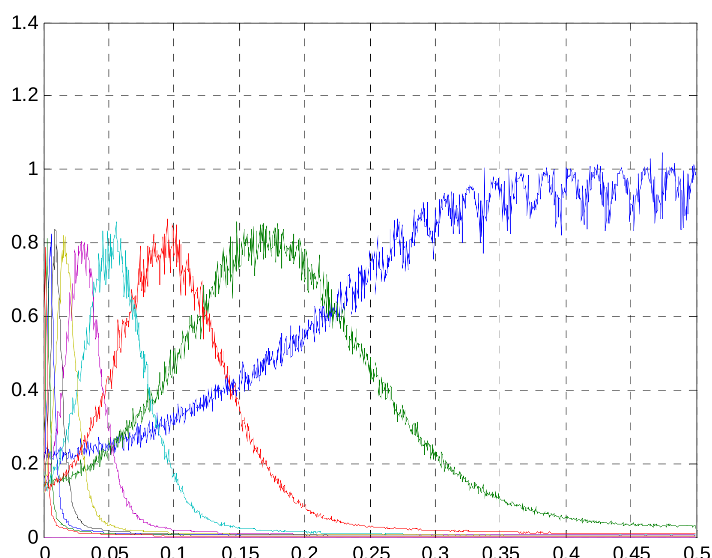


Fig. II.4: Comportamento da EMD como um banco de filtros. ▼

II.2.3.3 - Súmula das características das IMFs

A sequência das IMFs obtidas vem ordenada das de frequência central mais elevada, para as de frequências centrais mais baixas. Não é possível saber de antemão em quantas IMFs um sinal se vai decompor.

Esta decomposição é não linear, mas proporcional. Por ser não linear, se somarmos dois sinais, o conjunto das IMFs da soma não é o somatório das IMFs dos sinais individuais. Mas por ser proporcional, se multiplicarmos um sinal por uma constante, então todas as IMFs vêm multiplicadas por essa constante. Assim, se se multiplicar o sinal por menos um, todas as IMFs virão com o sinal trocado.

Além disso, a inversão do sentido do tempo, não altera o conjunto das IMFs em nada mais que a inversão do sentido do tempo em todas elas.

Finalmente se se somar uma constante ao sinal, todas as IMFs ficam inalteradas, excepto a componente de *trend*.

II.3 - Problemas associados à EMD

Por ser uma técnica definida por um algoritmo, e não por uma formulação analítica, verifica-se que é muito dependente, quer de pequenos detalhes no software efectivamente empregue, quer de pequenos detalhes no próprio sinal. Os detalhes mais influentes e relevantes são descritos já de seguida.

II.3.1 - Comportamento numérico, ruído e extremidades

Constata-se que esta decomposição exibe uma extrema sensibilidade ao ruído, aos arredondamentos numéricos e às condições fronteira. Por vezes, nos ensaios realizados, bastava variar ligeiramente o valor de uma única amostra do sinal, para que o conjunto de IMFs obtidas fosse completamente diferente, quer em número, quer em características individuais.

O algoritmo é particularmente sensível, quer às condições fronteira, quer ao ruído. Não é portanto de estranhar que quando, na parametrização do processo iterativo, se estipula que a energia do resíduo tem que estar no mínimo 60 DBs abaixo da energia da componente, tal não permite obter componentes que identifiquem características relevantes, pois o ruído de arredondamento numérico assume proporções determinantes.

II.3.2 - Estimação dos extremos

A estimativa de envolvente que o algoritmo EMD efectua pode não coincidir exactamente com a envolvente $A(t)$ de sinais definidos analiticamente. Um exemplo simples ilustra esta situação (Rato-2008a): A função $x(t)=e^{-|t|}\cos(\omega_0 t)$ tem $e^{-|t|}$ como envolvente, mas quase todos os extremos não coincidem com ela.

Mas não é só neste exemplo ilustrativo que tal acontece. Verifica-se que a estimativa de envolvente que o algoritmo EMD efectua não coincide com a definição analítica, quando esta existe. Isto porque a envolvente estimada passa pelos extremos sendo os outros pontos obtidos por interpolação. A escolha do interpolador é um problema mal definido no sentido de Hadamard. Huang utiliza splines cúbicas como interpoladores. Outros interpoladores, muitos outros, são possíveis. Ou seja, não existe uma maneira única e definitiva de definir a "verdadeira" envolvente, quer o sinal seja contínuo no tempo, quer seja discreto.

Por outro lado, em formulações discretas não é expedita a localização dos extremos. Tal acontece porque, quando se trabalha com sinais em tempo discreto, a definição dos extremos não pode ser baseada numa vizinhança contínua, ao contrário do que acontece no CDI (Cálculo Diferencial e Integral de ordem inteira). É também necessário criar regras para lidar com aqueles casos em que duas amostras consecutivas têm o mesmo valor, tanto mais que estes casos podem ter frequências de ocorrência não desprezáveis. Tem assim que ser efectuada uma adaptação conceptual, pois a vizinhança é discreta e muitas vezes quantificada.

É no entanto razoável considerar que essa adaptação tem que preservar algumas propriedades e características dos extremos provenientes do CDI, nomeadamente que:

1) A multiplicação de um sinal por menos um transforma todos os máximos em mínimos e vice-versa. Ou seja, quando $y(t) = -x(t)$, tem-se que o conjunto de todos os máximos de $x(t)$ é igual ao conjunto de todos os mínimos de $y(t)$, e concomitantemente, o conjunto de todos os mínimos de $x(t)$ é igual ao conjunto de todos os máximos de $y(t)$. Da mesma forma, se os sinais forem discretos no tempo, quando $y[n] = -x[n]$ então o conjunto dos máximos de $y[n]$ deverá ser igual ao conjunto dos mínimos de $x[n]$, e concomitantemente, o conjunto dos mínimos de $y[n]$ deverá ser igual ao conjunto dos máximo de $x[n]$.

2) A inversão do sentido do tempo inverte tanto a sucessão dos máximos como a sucessão dos mínimos.

3) Finalmente coloca-se a questão: Deve, ou não, considerar-se que o extremo só pode estar localizado no momento amostral? Ou poderá estar localizado num instante interamostral?

II.3.2.1 - Influência do ritmo de amostragem na estimação dos extremos

Existem autores (Flandrin-2004) (Rilling-2006) que advogam o incremento da frequência de amostragem de forma a atenuar o facto de ser praticamente impossível a coincidência de um instante amostral com um máximo de $x(t)$. Verifica-se que existem sinais de banda limitada onde, por maior que seja o ritmo amostral, entre duas amostras consecutivas pode sempre existir um máximo e um mínimo. Sendo assim e por maior que seja o ritmo amostral não se pode garantir que os extremos de $x(t)$ e os extremos de $x[n]$ sejam em igual número, o que dificulta a sua estimação correcta e consequentemente, como se verá, a estimação das envolventes.

II.3.3 - Estimação das envolventes

A envolvente de um sinal discreto, não é uma função única. Além disso, qualquer envolvente tem de verificar a propriedade da envolvência, pelo que, relativamente à envolvente, o sinal não pode ter sobreelevações, *overshoots*, nem subdepressões, *undershoots*.

II.3.3.1 - Comportamento das splines

Na grande maioria dos algoritmos de EMD as envolventes são estimadas usando splines cujos pontos fiduciais conhecidos são os extremos identificados. Sendo polinómios, normalmente do terceiro grau, e mesmo após refinamentos algoritmicos de forma a evitar quer a sobreelevaçõe, quer as subdepressões, as splines continuam a exibir comportamentos desadequados, como grandes sobrextensões em que se afastam exageradamente das amostras. Essas sobreextensões melhoram significativamente quando filtradas pelas técnicas usuais.

II.3.3.2 - Sobrelevações e subdepressões

Uma verdadeira envolvente não tem estas anomalias. Demonstra-se que, baseando as splines apenas nos extremos, é sempre possível definir um caso que origine uma destas

anomalias. Foi assim criado um algoritmo que combate activamente estas ocorrências, obtendo envolventes livres de anomalias.

No entanto o desempenho global da decomposição não melhorou significativamente.

II.4 - Aspectos teóricos da EMD

Normalmente as definições de índole matemática são expressas de forma analítica. Será que se pode exprimir uma definição apenas pelo algoritmo? Vários algoritmos semelhantes podem ser considerados como realizando EMDs, ainda que diferentes umas das outras? Coloca-se naturalmente a questão: «Quando é que um algoritmo pode ser considerado como procedendo a uma EMD?». Com esse intuito, no final da próxima secção, mais concretamente na subsecção "II.4.4 - Princípios guia da EMD ", vão ser listadas as seis condições heurísticas que devem ser verificadas em qualquer implementação concreta. Se uma delas falhar, a implementação não pode ser considerada uma EMD.

Por outro lado é preciso garantir o rigor interlocutório. Ou seja, é necessário uniformizar a definição do algoritmo para que todos os interessados interpretem da mesma forma as instruções expostas. Deste modo, todos eles, mesmo quando operando de forma independente, para o mesmo *input*, obterão o mesmo *output*. Pretende-se que seja possível que diferentes investigadores possam construir programas que conduzam aos mesmos resultados para os mesmos sinais. Vai ser dado início a essa refinação, que será prosseguida nos capítulos subsequentes.

II.4.1 - Abstracção do que é uma EMD

Uma EMD é uma decomposição de um sinal S num conjunto $\{\Phi_i\}$ cujos elementos são um "*trend*" ou uma tendência e as IMFs. Para tornar a linguagem mais leve iremos referir simplesmente por IMFs os elementos de $\{\Phi_i\}$, referindo «IMFs sem o *trend*» quando necessário. Deste modo, a soma da totalidade das IMFs resulta na reconstituição do sinal original, ou seja $S = \sum_i \Phi_i$.

Esta decomposição é obtida por aplicação de um algoritmo, não se conhecendo outra forma de a obter, como por exemplo por meio de uma expressão analítica deduzida a partir de propriedades formais. Esta situação é semelhante à encontrada nas investigações sobre autómatos celulares (Ganguly-2003): Num grande número de autómatos celulares, a forma mais

compacta de exprimir o resultado da computação é a representada pelo próprio autómato, não adiantando procurar uma formulação analítica, que forneça uma “atalho” para obter rapidamente o resultado. Da mesma forma, para uma EMD, a definição mais compacta e computacionalmente mais eficiente é conjecturalmente a consubstanciada pelo próprio algoritmo.

Numa linguagem mais formal, seja $\{s[n]\}$ um sinal discreto com N amostras, a que chamaremos S, ou seja $S=\{s[n]\}$. Represente-se a aplicação de uma EMD a um sinal S por $EMD(S)$. Virá então que $\{\Phi_i\}=EMD(S)$. Tem-se que $\#\{\Phi_i\}=I$, pelo que $S=\sum_{i=1}^{i=I}\Phi_i$.

O número total de IMFs, I, não é predeterminado, sendo conhecido só depois da aplicação da EMD. Ou seja, a EMD de um sinal S dará origem a um conjunto de I IMFs, sendo cada uma delas representado por Φ_i. Cada IMF é ela próprio um sinal com N amostras. Ou seja, para cada Φ_i, é válida a seguinte relação $\Phi_i=\{\varphi_i[n]\}$, pelo que se tem que $s[n]=\sum_{i=1}^{i=I}\varphi_i[n]$ para cada amostra $s[n]$.

II.4.2 - Combinação de EMDs

Uma consequência do exposto é que uma combinação linear variável em n, de várias EMDs, todas com o mesmo número de IMFs, ainda é uma EMD, desde que a soma das ponderações seja sempre unitária, independentemente do n. Veja-se melhor.

Considerem-se duas EMDs do mesmo sinal $S=\{s[n]\}$, com $\#S=N$, tais que $\{\Phi_i\}=EMD_1(S)$ e $\{\Psi_i\}=EMD_2(S)$ e em que ambas originam o mesmo número de IMFs, ou seja $\#\{\Phi_i\}=\#\{\Psi_i\}=I$.

Considerem-se agora dois sinais reais, os sinais que vão ser utilizados na ponderação, na combinação linear variável em n, também cada um deles com N amostras, $P_1=\{p_1[n]\}$ e $P_2=\{p_2[n]\}$, tais que $p_1[n]+p_2[n]=1$ para todo e qualquer $1\leq n\leq N$. Tem-se então que, para cada amostra $s[n]$, é válido que $s[n]=p_1[n]\sum_{i=1}^{i=I}\varphi_i[n]+p_2[n]\sum_{i=1}^{i=I}\psi_i[n]$. Este raciocínio é facilmente generalizado para mais do que duas EMDs, desde que em cada índice n a soma das ponderações seja sempre unitária.

Sendo assim, o sinal sucessão dos pesos da combinação linear P_1 pode ir crescendo linearmente de zero até um, enquanto concomitantemente o sinal sucessão dos pesos da combinação linear P_2 pode ir minguando de um até zero. Tal pode ser visto como uma combinação linear progressiva. Desta forma obtém-se um novo conjunto de IMFs para o sinal S, onde em cada uma dessas IMFs as primeiras amostras são praticamente resultantes da decomposição $EMD_1(S)$ e as últimas são praticamente resultantes da decomposição $EMD_2(S)$, sendo suave a transição de uma para a outra. Esta propriedade pode ser utilizada para realizar o acerto das IMFs numa análise EMD por janelas.

II.4.3 - Quantas EMDs é que são possíveis?

São possíveis de ser definidas tantas EMDs quantas as variações algorítmicas possíveis, em sentido lato. Além disso, para cada uma das EMDs, e pelo facto de não possuírem formulação analítica, pode dar-se o caso de, devido a ambiguidades, vaguezas, carências na sua definição, as diferentes implementações exibam diferenças, no sentido em que fornecem resultados diferentes quando analisam os mesmos dados. E que tal aconteça, mesmo sem erro de transcrição da especificação para o código do programa, simplesmente devido ao facto de a especificação ser insuficiente.

Para evitar esse fenómeno é necessário completar e aclarar os pormenores da definição.

Ao examinar-se a definição de Huang (Huang-1998), constata-se que em certos conceitos os detalhes estão definidos de forma vaga. Ao procurar torná-los menos vagos, é necessário efectuar decisões definidoras. Conforme a sentença do decisor, em cada caso de concretização algorítmica, as decisões acabarão por ser num sentido ou noutro. Consequentemente, as EMDs resultantes não são todas equivalentes.

Um desses conceitos, onde se nota essa dependência Relativamente ao comportamento do decisor, é o dos extremos. Quando se deve considerar um ponto como extremo? Qual é a regra de classificação de um ponto em extremo ou em não extremo? Em que características do sinal é que essa regra deve ser baseada?

Uma outra questão que pode ser considerada como semelhante em termos de escassa definição, e relacionada com a anterior, tem a ver com a adequada conceptualização do que é uma envolvente. Será que as envolventes têm de ser tangentes aos extremos? Será que as envolventes podem cruzar o sinal? Deverão ser sempre construídas usando "*splines*" por base? Que "*splines*" serão mais adequadas? O cálculo dos pontos iniciais e finais das

envolventes também deverá ser refinado. Deverão ser livres, ou fixos? Se fixos, deverão ser iguais a zero, ou a que outro valores?

Por outro lado, é também possível considerar que existem características espectáveis para aquilo que é encontrado. É razoável supor que aplicando o algoritmo a uma IMF já extraída, ela deva ficar na mesma. Por outro lado, invertendo o sentido do tempo, todas as IMFs deverão vir invertidas no tempo. Além disso, todas as IMFs sem o *trend*, deverão ser invariantes à soma de uma componente contínua ao sinal. Ou seja, a posição do zero da escala de medida não deve influenciar a decomposição.

Estas considerações devem ser sistematizadas e completadas, pela formulação princípios guia, transversais a qualquer algoritmo que se reclame EMD. Tal é efectuado já na próxima secção.

II.4.4 - Princípios guia da EMD

Relembre-se que utilizando a EMD, um sinal discreto, qualquer que ele seja, é decomposto num conjunto de IMFs. Para começar, em primeira aproximação e de uma forma intuitiva , é sedutor entender uma IMF como uma oscilação mais ou menos simples, mais ou menos uniforme, mais ou menos estacionária, e de média desprezável. Infelizmente, a maior parte dos sinais não se comporta desta forma e, embora oscilem, fazem-no em torno de uma tendência nem nula nem estacionária, pelo que nem não podem ser considerados como meros modos oscilantes.

Olhando para um sinal real, identificamos com facilidade quer os extremos, ou seja os máximos e mínimos locais, quer as passagens por zero. Normalmente muitos mais extremos que passagens por zero, pois o sinal não oscila em torno de zero. O relacionamento entrelaçado entre os extremos e as passagens por zero, é consequente das oscilações dentro de oscilações dentro de outras oscilações, …, e assim por aí em diante. Cada uma dessas ondulações tem um ritmo característico, tem tempos próprios. São características locais, num sinal não estacionário, e que devem ser aproveitadas na determinação dos modos oscilantes.

Relativamente aos modos oscilantes, e como suas características intuitivas, encontramos as seguintes propriedades, que traduzem uma certa ideia de oscilação simples:

a) A média das envolventes é nula.

b) Entre um máximo e um mínimo (ou mínimo e máximo) consecutivos, tem que existir uma passagem por zero.

Notar a subtil diferença em relação a uma formulação como «Entre extremos consecutivos tem que existir uma passagem por zero». Como iremos ver, esta formulação permite que se tenham dois máximos (ou mínimos) consecutivos. Tal possibilidade vai revelar-se fecunda, quer conceptualmente, quer em aplicações práticas, tal como exposto na secção « II.6 - Súmula».

Relativamente ao resultado da aplicação de uma EMD a um sinal, é espectável que se tenha:

c) O somatório das IMFs tem que resultar na reconstrução do sinal original.

d) Aplicando a EMD a uma IMF, deve obter-se a mesma IMF.

e) Invertendo o sentido do tempo, todas as IMFs vêm invertidas no tempo. Invertendo a polaridade ao sinal, todas as IMFs vêm com a polaridade invertida.

f) Quando o sinal é expandido/truncado por uma amostra, o número de IMFs, ou fica constante, ou varia uma unidade.

Sendo uma técnica empírica, e baseada num algoritmo, a sua formulação analítica ainda não foi realizada. Para além disso, tem sido encontrada dependência dos resultados relativamente à implementação. Esta situação é insatisfatória, e tem raízes na forma vaga com que os conceitos suporte da técnica foram definidos. Para obviar a essa situação, e para servir de guia no aclarar dos conceitos envolvidos, as seis condições atrás listadas, a) até f), devem ser verificadas em qualquer implementação concreta. Se uma delas falhar, a implementação não poderá ser considerada uma EMD.

Seguidamente vai ser reelaborada a definição de alguns conceitos, com vista, quer a exprimir mais formalmente estas seis condições, quer a permitir descrever o algoritmo de forma mais rigorosa.

II. 5 - Sobre os sinais discretos

Como se viu, uma amostra isolada é representada por $x[n]$, e o sinal X por $\{x[n]\}$. O número n é chamado "índice da amostra" sendo, para sinais regulares, inteiro e admitindo o nome "número (de ordem) da amostra". O número x, presente em $x[n]$, é chamado "valor da amostra n". Considera-se que um sinal discreto é um conjunto finito totalmente ordenado, em que cada elemento é um par ordenado, par esse em que ambas as componentes têm valores válidos, representado por $x[n]$.

Como cada amostra é um par ordenado é adequado definir duas operações sobre amostras, que têm como resultados números. Uma das operações será aquela que, dada a amostra, tem como resultado o seu valor. Esta operação será representada por $val()$. A outra operação é aquela que dada a amostra, tem como resultado o seu índice. Esta operação será representada por $idx()$. Tem-se assim que $x = val(x[n])$ e que $n = idx(x[n])$.

Refira-se que é habitual na literatura considerar $val(x[n])$ e $x[n]$ como indistinguíveis, como sendo ambos o mesmo, sempre que tal não possa provocar más interpretações. Tal "vício" de linguagem é prático, expedito e comum. A ele não nos furtaremos.

II.5.1 - Sinais ilesos

Relativamente aos sinais discretos existem dois detalhes importantes, envolvendo o conceito de índice da amostra, que convém considerar.

O primeiro detalhe é que, no mesmo sinal, não existem amostras com índices idênticos. Do ponto de vista abstracto e matemático, pode ser considerado evidente, visto que temos uma ordenação total pelos índices, que seria violada se existisse uma repetição de índices. Do ponto de vista prático tal pode ocorrer, como por exemplo em comunicações com deficiente recepção. Se tal acontecer dir-se-á que o sinal está **dobrado**. É estipulado que, neste texto, tal situação nunca é considerada, tanto mais que começa por ser exigida a ordenação total. Os sinais considerados são sempre não dobrados.

O segundo detalhe é que não existem amostras em falta. Se existirem amostras em falta, diremos que o sinal está **fendido**. A condição de ordenação total não é suficiente para o evitar. É também estipulado que neste texto nunca irá ser considerada esse tipo de situação.

Significa isso que neste texto ir-se-á sempre lidar com sinais simultaneamente não dobrados e não fendidos. Os sinais que verificam estas duas condições são chamados de **ilesos**. Se num sinal ileso forem permutados os índices de duas amostras, o que corresponde a permutar o "lugar" de duas amostras, o sinal resultante é considerado distinto do original, mas também é um sinal ileso.

Saliente-se que o adjectivo "ileso" caracteriza propriedades do índice do sinal. Na literatura sobre sinais discretos é frequente pressupor, ainda que não explicitamente, que os sinais são sempre ilesos, e que as amostras não ficam com os índices trocados quando se estuda o efeito do ruído. Ruído aditivo, multiplicativo, impulsivo ou outro, branco ou

colorido, gaussiano ou não, estacionário ou não, tudo isso vai influenciar apenas o $val(x[n])$, nunca o $idx(x[n])$.

Num sinal ileso e regular, a diferença entre os índices de duas amostras consecutivas tem sempre o valor absoluto de 1. Se fosse zero implicaria que duas amostras distintas tinham o mesmo índice, o que como vimos não pode acontecer, e se fosse maior do que um indicaria que faltavam amostras na sequência, o que também não pode acontecer.

II.5.2 - Extremos em sinais ilesos

Como se viu, um sinal discreto é um conjunto totalmente ordenado de amostras. Cada amostra é um par ordenado. Acontece que não está definida a comparação de pares ordenados. Não se comparam directamente pares ordenados. Como exemplo basta relembrar que a comparação de números complexos não está definida. O que se sabe comparar são os números, simples, escalares. O que tem sentido é dizer-se que uma amostra tem um valor maior/menor que o de outra, ou tem um índice maior/menor que outra.

Considera-se então que a classificação de uma amostra como Máximo ou Mínimo vai depender da comparação do seu valor com o valor das amostras que estão, e constituem, a sua vizinhança. A classificação em Máximos e Mínimos tem que ser uma função da vizinhança.

II.5.2.1 - Vizinhanças em sinais ilesos.

Para iniciar as considerações envolvidas na estipulação do que são extremos em sinais discretos, considerem-se duas amostras consecutivas, $x[n]$ e $x[n+1]$. A relação entre os seus valores só se pode encontrar-se numa de três situações: Ou $val(x[n]) > val(x[n+1])$, ou $val(x[n]) < val(x[n+1])$, ou então são iguais. Pelo que para três amostras consecutivas, só poderemos ter $3 \times 3 = 9$ combinações distintas, apresentadas na seguinte tabela:

Tabela II.1: Vizinhança imediata - As nove relações possíveis do valor de uma amostra com o das suas vizinhas imediatas (de primeira ordem) num sinal unidimensional.

	x[n]	
	x[n-1]	x[n+1]
	<	<
	<	=
	<	>
	=	<
	=	=
	=	>
	>	<
	>	=
	>	>

Neste ponto é conveniente aclarar o que se pode considerar como função quer de uma amostra, quer de uma vizinhança, quer de todo o sinal.

A energia é função de todo o sinal. Para o seu cálculo são necessários os valores de todas as amostras do sinal. Por outro lado, o valor do sinal num dado momento de amostragem é função de uma amostra. Para ser conhecido, só é necessário o conhecimento da amostra correspondente a esse índice.

Um extremo, quer seja um máximo ou um mínimo, não é nem função do sinal como um todo, nem função de uma única amostra. Poderá dizer-se então que é função da vizinhança, mas tal requer que se defina melhor o que são amostras vizinhas, ou o que é a vizinhança.

[DII.01] Diz-se que duas amostras são **k-vizinha**s quando os seus índices diferem de **k** unidades. ▲

[DII.02] Quando se afirma que duas amostras são **adjacentes**, tal deve ser entendido como querendo dizer que elas são 1-vizinhas. ▲

[DII.03] Por vezes também se chamam as 1-vizinhas por **vizinhas imediatas**. ▲

[DII.04] Chama-se **k-vizinhança** de uma dada amostra ao conjunto de todas as amostras cujos índices diferem no máximo em k unidades do índice da amostra dada. ▲

[DII.05] A 1-vizinhança é por vezes referida como **vizinhança de primeira ordem**. A 2-vizinhança pode ser referida como **vizinhança de segunda ordem**. E assim por diante. ▲

Muitas vezes a linguagem é simplificada, e quando o k está subentendido, diz-se que uma amostra está na vizinhança de outra, ou que as amostras são vizinhas. Quando o k é um, é equivalente afirmar que as amostras são vizinhas ou que são adjacentes.

II.5.3 Funções classificativas

A determinação se uma dada amostra deve ser ou não considerada como extremo é uma função de uma k-vizinhança. Note-se pois que os máximos ou os mínimos, ainda que comummente referidos a um único ponto (Como em frases do tipo: 'a amostra "tal" é um máximo') são funções da vizinhança.

Neste texto, e para o propósito de decidir se determinada amostra deve ou não ser considerada um extremo, vai considerar-se como relevante apenas a informação proveniente da vizinhança de primeira ordem. Sendo assim a tabela II.1 lista a totalidade dos casos, não se considerando, por agora, o caso particular da classificação da primeira e última amostra do sinal. Como se constata, qualquer função classificativa que tenha como argumentos as relações de grandeza entre os valores das amostras que estão na vizinhança imediata só pode ter nove argumentos distintos. A função classificativa só pode ter um de dois resultados possíveis. Ou o resultado de V, VERDADEIRO, indicado por ✓, querendo dizer que foi classificado como sendo um máximo/mínimo. Ou o resultado de F, FALSO, sem indicação explícita, querendo dizer que foi classificado como não sendo.

Tem-se assim que nove é a cardinalidade do conjunto D, domínio da função classificativa. Tem-se pois que $\#D = 9$. E que é dois a cardinalidade do conjunto C, contradomínio da função. Tem-se pois que $\#C = 2$. Como quer o domínio quer o contradomínio são finitos, é possível calcular o número de funções distintas possíveis, que como se sabe é $\#C^{(\#D)}$. Obtém-se assim um universo de 512 funções possíveis, no qual é preciso escolher uma como sendo a função determinante para os máximos, e outra para os mínimos.

Para o caso de um máximo em sentido estrito, em que só se considera que $x[n]$ é um máximo se for maior que qualquer amostra da sua vizinhança de primeira ordem, a tabela de verdade, que nos informa se $x[n]$ é ou não um máximo em sentido estrito, assumirá os seguintes valores, explicitados na tabela II.2:

Tabela II.2: Máximo em sentido estrito - Definição de máximo em sentido estrito como função das nove relações possíveis de grandeza mútua do valor uma amostra com o das suas vizinhas imediatas (de primeira ordem) num sinal unidimensional.

	x[n]		
	x[n-1]	x[n+1]	Max
	<	<	✓
	<	=	
	<	>	
	=	<	
	=	=	
	=	>	
	>	<	
	>	=	
	>	>	

O que se acabou de tornar patente é que é exactamente a partir das relações mútuas de grandeza de uma amostra com a sua vizinhança de primeira ordem que é possível concluir sobre a existência (ou não existência) naquele índice de um máximo local. Conforme o argumento apresentado à função classificativa, temos o resultado: ou é máximo em sentido estrito ou não. Procedendo de igual modo, também é possível definir o mínimo em sentido

restrito. Nas extremidades iniciais e finais do sinal esta metodologia não pode ser aplicada pois faltam argumentos para alimentar a função classificativa.

II.5.3.1 - Escolha das funções classificativas

Dever-se-á trabalhar com as definições de máximos e mínimos em sentido restrito? A experiência empírica acumulada mostra que qualquer uma delas é muito restritiva, pois não considera como extremos válidos aquelas amostra que têm outra de igual valor na vizinhança imediata. Ora é um facto experimental que tal acontece nos sinais reais. O sinal sobe, mantém-se e desce. Duas ou mais amostras consecutivas têm o mesmo valor. E são justamente essas que possuem o valor mais elevado de todo o sinal. Têm pois de ser classificadas como extremo. Mas a função apresentada não o faz. Então é necessário escolher outra função, de entre o universo das 512 possíveis.

Como ajuda à escolha das funções classificativas apropriadas, devem considerar-se algumas propriedades que é razoável pretender que estas funções possuam. São elas as seguintes:

1) Invariância relativamente ao sentido, ou origem, do tempo.

2) A multiplicação do valor de todas as amostras por qualquer constante negativa, deverá trocar os mínimos com os máximos.

Estas propriedades são consequência directa para a especificação da EMD, da propriedade e), secção "II.1.2 - Princípios guia da EMD".

Veja-se agora como estas propriedades eliminam funções, de forma a reduzir o universo original de 512 candidatas a um conjunto com um número bastante menor de funções. Comece-se por identificar todas as funções, por meio de uma nomenclatura apropriada. Essa nomenclatura primeiramente irá listar de forma única e ordenada, todas as vizinhanças de primeira ordem. Depois cada função será numerada, também de forma única e ordenada.

Para proceder à listagem de forma única e ordenada de todas as vizinhanças de primeira ordem, comece-se por efectuar as recodificações simbólicas: $'<'\mapsto'0'$, $'='\mapsto'1'$, $'>'\mapsto'2'$. Os nove casos listados na tabela 1, serão convertidos na lista das nove combinações possíveis dos símbolos $'0'$, $'1'$ e $'2'$, dois a dois. Teremos assim uma lista ordenada de fiadas simbólicas que começa na combinação $"00"$ e termina na combinação $"22"$. Se esta lista for entendida como um sistema de numeração escrito em base 3, ter-se-á como consequência que esta lista

equivale aos inteiros 0 a 8. Tal listagem de recodificação está explicitada na seguinte tabela (tabela II.3):

Tabela II.3: Recodificação das vizinhanças - Forma de recodificar as nove relações possíveis de grandeza mútua do valor de amostra com o das suas vizinhas imediatas (de primeira ordem) num sinal unidimensional, de forma a numerá-las sequencialmente.

	x[n]					
	x[n-1]	x[n+1]	Recodificação		Linha	Peso
	<	<	0	0	0	2^0= 1
	<	=	0	1	1	2^1= 2
	<	>	0	2	2	2^2= 4
	=	<	1	0	3	2^3= 8
	=	=	1	1	4	2^4= 16
	=	>	1	2	5	2^5= 32
	>	<	2	0	6	2^6= 64
	>	=	2	1	7	2^7= 128
	>	>	2	2	8	2^8= 256

Uma vez que a cada linha da tabela corresponde um número distinto, existe a possibilidade de esse número ser entendido como um expoente, consistindo a base que vai ser levantada a esse expoente no número que é a cardinalidade do conjunto C, o contradomínio da função selectora. Como se viu na secção "II.2.3 - Funções classificativas", essa cardinalidade tem o valor 2. Para cada linha fica assim definido um peso, que tem o valor de dois levantado a um expoente, expoente esse que não é outra coisa senão a fiada coincidente com o número da linha interpretada em base três.

II.6 - Máximos em sinais ilesos

Considere-se agora uma função qualquer, candidata a função selectora. Essa função pode ser definida completamente através de uma tabela de verdade com nove linhas, que, para cada configuração possível de entrada, apresenta um “1” ou um “0” como resultado. Pondere-se cada um dos resultados pelo peso de linha correspondente, tal como definido na tabela II.3. Para cada função candidata, somem-se os números obtidos pelo processo de ponderação. Obtém-se um número final, necessariamente entre zero e 511, que identifica a função. Ter-se-á assim uma representação de f_0 a f_{511} para as 512 funções candidatas. A função f_0 será a função trivialmente nula, nunca seleccionadora, e a função f_{511}, será uma função sempre seleccionadora. Ambas estas funções têm um interesse muito reduzido. Com um interesse maior encontramos a função f_1, a função selectora para o máximo restrito, e a função f_{256} que é a função seleccionadora para o mínimo restrito.

Para determinar uma função selectora de máximo local, que não a função f_1, selectora do máximo estrito e que contempla apenas a situação descrita na linha zero, tem-se na linha um uma situação que também deve ser contemplada. A propriedade primeira desta secção vai obrigar a escolher também a linha três, pois de outra forma não será garantida a invariância Relativamente ao sentido do tempo. Obtém-se assim uma função selectora de máximos empíricos, a função f_{11}. Esta função selecciona como máximos mais casos que a f_1, mas o preço a pagar é que pontos de inflexão, como quando o sinal vai crescendo, estaciona e depois cresce outra vez irão ser considerados como máximos locais. Ao trabalhar apenas com vizinhanças de primeira ordem, tais casos não poderão ser detectados. Mas não é muito promissor aumentar a ordem da vizinhança apresentada à função selectora. Facilmente se vê que é sempre possível generalizar o exemplo anterior de inflexão. Em consequência seria sempre mais apropriado conhecer a vizinhança de ordem imediatamente mais elevada, e o processo não teria fim. Vai por isso continuar a analisar-se apenas as funções selectoras cujo domínio é a vizinhança de primeira ordem.

É possível argumentar que esta função não é a única que deve ser considerada. Para o demonstrar, imagine-se a seguinte situação: Um determinado sinal X sobe, atinge o nível a na amostra n, mantém-se nesse nível na amostra n+1 e n+2, e depois decai. Como, por hipótese, que o sinal vai a subir quando atinge o nível a, isso significa que val(x[n-1]) < a. Da mesma forma se conclui que val(x[n+2])> val(x[n+3]). Pelo que f_{11} irá classificar como máximos

empíricos as amostras de índice n e n+2. A amostra de índice n+1 não será classificada como máximo por f_{11}. Mas esta amostra, de índice n+1, tem um valor tão grande como a de índice n, ou n+2. Se as amostras estão todas juntas e têm todas o mesmo valor, como é que umas são consideradas máximo e outras não?

A função f_{11} não permite fazê-lo. Para corrigir esta situação ter-se-á então de considerar a situação descrita pela linha quatro como uma situação a detectar positivamente pela função selectora de máximo. Obtém-se assim a função selectora de máximo em sentido lato, a função f_{27}. Esta função irá fazer com que, num sinal, qualquer sucessão de valores constantes seja populada com máximos.

Demonstra-se assim que existem duas funções (três, se considerarmos a f_1.) selectoras de máximo local. São elas a função de máximo empírico, f_{11}, e a função de máximo em sentido lato, f_{27}. A tabela seguinte, tabela II.4, condensa e sistematiza todas estas considerações.

Tabela II.4: Definição de máximo - Definição de máximo, em sentido estrito, lato e empírico como função das nove relações possíveis de grandeza mútua de uma amostra com as suas vizinhas imediatas (de primeira ordem) num sinal unidimensional.

	x[n]					
	x[n-1]	x[n+1]	Peso	f_1: MaxEstrito	f_{11}: MaxEmpí	f_{27}: MaxLato
	<	<	$2^0 = 1$	✓	✓	✓
	<	=	$2^1 = 2$		✓	✓
	<	>	$2^2 = 4$			
	=	<	$2^3 = 8$		✓	✓
	=	=	$2^4 = 16$			✓
	=	>	$2^5 = 32$			
	>	<	$2^6 = 64$			
	>	=	$2^7 = 128$			
	>	>	$2^8 = 256$			

Como nota importante, é de salientar que, usando a Internet para fazer um levantamento de programas que efectuem EMD (2004 e 2008), e analisando o código de todos esses programas, em nenhum deles se encontrou a preocupação de consistência e sistematização da função selectora de máximo local para sinais discretos. Não é pois de estranhar o facto de todos esses programas discordarem uns dos outros nos resultados obtidos, ao analisarem o mesmo sinal. Como nota final, pode referir-se a função f_{17}. Também é função selectora de uma "espécie" de máximo, invariante perante uma inversão do tempo. Mas actualmente não é considerada como tendo interesse prático.

II.7 - Mínimos em sinais ilesos

Como foi visto, para ajuda à escolha das funções selectoras apropriadas, devem considerar-se algumas propriedades que é razoável pretender que as funções selectoras possuam. São elas as seguintes:

1) Invariância relativamente ao sentido, ou origem, do tempo.

2) A multiplicação do valor de todas as amostras por qualquer constante negativa, deverá trocar os mínimos com os máximos.

Estas propriedades são consequência directa para a especificação da EMD, da propriedade e), secção "II.4.4 - Princípios guia da EMD".

Ir-se-á agora utilizar esta última propriedade para determinar quais devem ser as funções selectoras dos mínimos.

Considere-se f_{256}, a função selectora do mínimo restrito. É fácil demonstrar que a relação entre a função f_1, a função selectora do máximo restrito, e a função f_{256}, é uma consequência imediata da propriedade 2. Esta propriedade realiza uma permutação dentro do domínio. Deixa inalterado o sinal de "=", mas troca o sinal de "<" com o sinal de ">", sem tocar no contradomínio, na coluna de zeros e um, onde a função é estipulada. Em termos numéricos, troca o zero com o dois, quer no número (em base 3) das linhas, quer nos pesos. Sendo assim a função f_1, na linha "$[00]_3$", zero, a que corresponde o peso um, vai transformar-se na função f_{256}, , na linha "$[22]_3$", linha oito, a que corresponde o peso 256.

Aplicando o mesmo raciocínio para as outras funções, obtém-se:

f_{11}: (Máximo empírico): Irá originar a função de mínimo empírico por aplicação do princípio 2. De $[11]_{10} \equiv 2^3+2^1+2^0$, vê-se que estão envolvidas as linhas 3, 1 e zero, que em base três serão as linhas $[10]_3$, $[01]_3$, $[00]_3$. Tal como anteriormente, multiplicando o sinal por um número negativo, trocará os menores com os maiores, ou seja o dígito 0 com o 2, e virá, que a nova função ocupará as linhas $[12]_3$, $[21]_3$ e $[22]_3$, que originará os pesos 2^5, 2^7 e 2^8, cuja soma é: 416. Demonstra-se assim que a função de mínimo empírica é a função f_{416} .

f_{27}: (Máximo lato): Irá originar a função de mínimo lato por aplicação do princípio 2. De $[27]_{10} \equiv 2^4+2^3+2^1+2^0$, vê-se que estão envolvidas as linhas 4,3, 1 e zero, que em base três serão as linhas $[11]_3$, $[10]_3$, $[01]_3$, $[00]_3$. Tal como anteriormente, multiplicando o sinal por um número negativo, trocará os menores com os maiores, ou seja o dígito 0 com o 2, e virá, que a

nova função ocupará as linhas $[11]_3$, $[12]_3$, $[21]_3$ e $[22]_3$, que originará os pesos 2^4, 2^5, 2^7 e 2^8, cuja soma é: 432. Demonstra-se assim que a função de mínimo em sentido lato é a função f_{432}. A tabela seguinte, tabela II.5, reúne as funções em epígrafe.

Tabela II.5: Definição de máximos e mínimos, em sentido estrito, lato e empírico como função das nove relações possíveis de grandeza mútua de uma amostra com as suas vizinhas imediatas (de primeira ordem) num sinal unidimensional.

	x[n]								
	x[n-1]	x[n+1]	Peso	f_1: Max	f_{11}: MaxE	f_{27}: MaxL	f_{256}: Min	f_{416}: MinE	f_{432}: MinL
	<	<	$2^0 = 1$	✓	✓	✓			
	<	=	$2^1 = 2$		✓	✓			
	<	>	$2^2 = 4$						
	=	<	$2^3 = 8$		✓	✓			
	=	=	$2^4 = 16$			✓			✓
	=	>	$2^5 = 32$					✓	✓
	>	<	$2^6 = 64$						
	>	=	$2^7 = 128$					✓	✓
	>	>	$2^8 = 256$				✓	✓	✓

Notar que uma mesma amostra pode ser classificada quer como máximo em sentido lato, quer como mínimo em sentido lato quando essa amostra é um ponto de estacionaridade. Tal faz algum sentido, pois um sinal constante é sempre igual ao seu máximo e ao seu mínimo.

Notar que neste procedimento tanto a primeira como a última amostra do sinal nunca são consideradas, pois não podem ser abrangidas pelas funções classificativas atrás definidas. Isto porque as funções classificativas, tal como definidas, não são tolerantes a falhas, não são tolerantes à ausência de um argumento.

II.8 - Consequências

Uma vez que estejam determinados os extremos do sinal discreto, considerado ileso, tanto em termos de mínimos como de máximos, é a partir deles que se determinam os pontos fiduciais que definem as envolventes. Estes pontos fiduciais podem ser simplesmente considerados como iguais aos próprios máximos e mínimos do sinal discreto.

No entanto os sinais discretos são muitas vezes obtidos por amostragem regular de sinais analógicos de banda limitada. É sabido que a amostragem de uma simples sinusóide quase nunca apanha os extremos analógicos. Tal cria uma flutuação nos valores dos extremos discretos, que provoca o desdobramento escusado em várias IMFs de uma simples sinusóide. Uma solução é considerar que o ponto fiducial a utilizar para a determinação da envolvente é o extremo analítico de uma parábola definida pelo extremo discreto e as amostras que lhe são adjacentes. Tal constitui um compromisso heurístico e prático entre o não fazer interpolação alguma ou o realizar a interpolação tendo por base funções $\frac{\sin(x)}{x}$. Verifica-se que resulta muito bem, embora a localização dos extremos passe a ser nos instantes interamostrais (Rato-2008a).

Vejamos como se determina o ponto fiducial com base na interpolação parabólica na 1-vizinhança de um extremo discreto $x[n]$. Sejam $y(1)=val(x[n-1])$, $y(2)=val(x[n])$ e $y(3)=val(x[n+1])$. A parábola interpolante é definida por $y(k)=ak^2+bk+c$, $k=1,2,3$, pelo que se tem que $\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ donde $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ -5/2 & 4 & -3/2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix}$.

As coordenadas (t_p, y_p) do ponto fiducial, que é o extremo parabólico, virão então $t_p = -\frac{b}{2a}$ e $y_p = -\frac{b}{2} t_p + c$.

É com base na sequência, não regular nem de índices inteiros, destes extremos parabólicos que as envolventes são estimadas.

Além disso, observou-se que o comportamento da decomposição melhorava, no sentido em que a EMD de um troço de sinusóide resulta tão-somente no próprio troço, se os pontos fiduciais fossem prolongados especularmente uma única vez para lá do suporte finito do sinal.

O código correspondente a este algoritmo EMD está publicado e disponibilizado em:

`http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/21409-empirical-mode-decomposition`.

II.9 - Súmula

Foi realizada a apresentação da EMD e do seu algoritmo.

Sobre este algoritmo pode ser dito o seguinte: A função de escolha de máximo é a f11, de máximo empírico. A função de escolha de mínimo é a f416, de mínimo empírico. Com estas funções escolhidas é possível que se tenham dois extremos do mesmo tipo (máximos ou mínimos) seguidos. Basta para tal que a função tenha um extremo com patamar, ou seja a função sobe(desce), fica em patamar e depois desce(sobe). Tal é bastante natural e útil para a estimativa das envolventes e tem grande utilidade prática, como já referido em «II.4.4 - Princípios guia da EMD».

As funções classificativas, tal como definidas, não são tolerantes a falhas, não são tolerantes à ausência de um argumento. Por isso nas extremidades estas funções não podem funcionar porque está ausente, não existe, uma das vizinhanças necessárias.

Esta problemática da tolerância está na raiz das considerações teóricas elaboradas no seguimento. Os próximos capítulos desenvolvem essas considerações, sob uma perspectiva finitista - construtivista da computação enquanto actividade mediada simbolicamente.

III - Símbolos e computação

Como se viu, ao procurar esmiuçar os detalhes dos algoritmos de EMD, foi-se muitas vezes confrontado com a situação em que as funções a aplicar careciam de definição, e que quando definidas, careciam de argumentos. Tornou-se assim imprescindível repensar a problemática da adequada formulação, em termos matemáticos, da ausência de dados e/ou argumentos para as funções. Este repensar da formulação não pôde e não pode ser efectuado adequadamente sem o recurso aos alicerces dos fundamentos. Foi assim necessário cortejar as impiedosas paisagens abstractas onde se localizam as nascentes do grande rio da matemática.

Neste repensar da problemática, a perspectiva que está subjacente é construtivista, de índole finitista. Isto porque procura elaborar, de forma absolutamente geral, os conceitos a partir de outros antecedentes. Esta demanda do antecedente enferma do germe da busca eterna. Por isso, e de acordo com determinadas correntes de pensamento que consideram o conhecimento humano como construído a partir do empirismo perceptivo (Locke-1999) (Peirce-1958) (Wittgenstein-2010), a base desta construção assenta no acto perceptivo elementar, na detecção da presença ou ausência de símbolos. Esta base é considerada geral, transcendendo o humano, transversal aos sistemas perceptivos naturais ou artificiais, biológicos, digitais ou quaisquer outros. Esta generalidade é necessária porque a percepção de símbolos não é uma exclusividade humana e também porque a computação não é uma exclusividade humana.

Comece-se por expor os pressupostos.

III.1 - Pressupostos computacionais e comunicacionais

Para os aspirantes a interlocutores o arranque comunicacional é sempre difícil. Isto acontece porque é preciso construir as mútuas convenções, básicas à comunicação, quando ainda não se comunica. Como fazê-lo, evitando a armadilha de ficar para sempre na ilusão da comunicação alcançada e da refutação do equívoco? Exemplifique-se esta armadilha pela seguinte descrição: Quando vejo verde e digo que vejo verde e o meu interlocutor também diz que vê verde, como poderei ter a certeza que o verde a que eu me refiro é o mesmo a que ele se refere? Como ter a certeza que, quando ambos afirmamos verde, estamos a representar o mesmo representado? Este problema coloca-se não só para a cor verde mas para todas as cores em geral. Aliás, a dificuldade até transcende o cromático visual, manifestando-se de igual forma para cheiros, sons ou mesmo símbolos e mensagens quaisquer. Consta que, para

obviar a este problema, a pragmática diplomacia americana tem uma expressão muito interessante e habitual «Sabemos que a nossa mensagem foi recebida e entendida no sentido que lhe demos». Ou seja, pragmaticamente esconjuram o âmago da questão tomando como certo e conhecido aquilo que é pressuposto.

Este problema comunicacional da identificação dos pressupostos comuns é recorrente em todos os níveis de análise do processo comunicativo, desde os basilares em termos físico - biológicos, até às aplicações ao mais alto nível, como os colocados pela semântica diplomática.

O processo comunicativo e as suas problemáticas são o clássico objecto dos estudos semióticos, com os seus signos, símbolos, interpretantes e representados. Convém, no entanto, tecer previamente algumas considerações sobre a interdependência entre os símbolos e a mediação cognitiva na percepção aos estímulos físicos. São tais considerações que vão ser seguidamente apresentadas.

III.1.1 - Cognição e símbolos

A construção dos pressupostos comuns é facilitada pela partilha de uma mesma aptidão para percepcionar o ambiente e os estímulos que emana. Para o ilustrar, considere-se uma figura de Ishiara (Ishihara-1917), representada tanto monocromaticamente como a cores. A representação central é que é a mais equilibrada, sendo as representações marginais representativas de ênfases cognitivas consideradas patológicas:

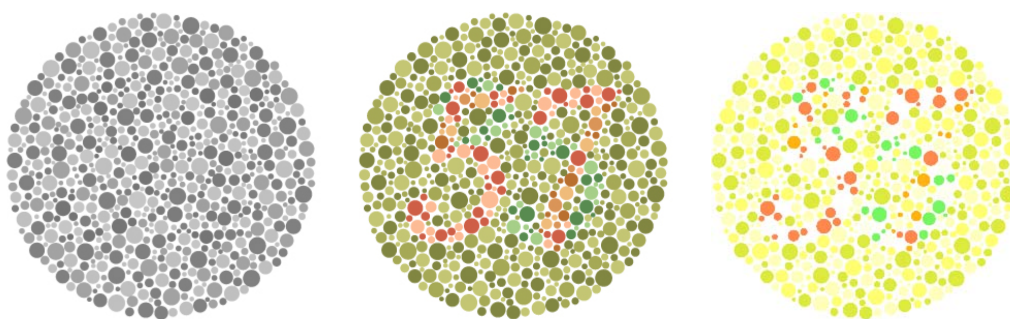


Fig. III.1: Uma figura de Ishiara

O que lá está escrito? Será o número 57? Ou será outro número, como o 35? Ou será que não se vislumbra lá nada para além de uma confusão de pontos? Claro que a resposta irá

depender de quem olha, se tem uma visão normal ou se porventura apresenta alguma forma de daltonismo, de cegueira cromática. O ponto importante aqui é que dois sistemas cognitivos podem percepcionar distintamente um mesmo estímulo. Por isso, logo a este nível, infiltra-se a incerteza quanto à comunhão interpretativa. Cada interveniente no processo é forçado a pressupor que os outros percepcionam a realidade comum de forma compatível. Quanto mais comum for, *de factum*, esta comunhão interpretativa, maior será a facilitação interlocutória.

Borges afirma: "Toda a linguagem é um alfabeto de símbolos cujo exercício pressupõe um passado que os interlocutores compartilham. Jorge Luís Borges, *in* 'O Aleph'"

Será de acrescentar que, para diminuir a incerteza comunicativa, os interlocutores além de compartilharem o alfabeto, também têm de o percepcionar de forma semelhante? Até que ponto a similitude de capacidades perceptivas é importante para o estabelecer das convenções iniciais onde se irá basear a comunicação?

É sabido que para poderem existir elementos de comunicação primordiais e comuns a todos os interlocutores, aquilo que se chamam símbolos comuns, são necessários sistemas cognitivos que os reconheçam. A pergunta "O que é um símbolo?" tem como reposta "Símbolo é o que se quiser". Significa isto que sem sistema cognitivo que os apreenda (defina), não existem símbolos. Os símbolos são criados pela cognição. O real concreto e particular, físico, externo à cognição, indiferente à cognição, pode ser ou não símbolo. Tudo depende de como é percepcionado. É caso para dizer que ao cartesiano "Penso, logo existo" contrapõe-se o "Percepciono, logo existo".

Posto isto e também no sentido de estancar esta volúpia do relativismo estímulo / percepção versus símbolo / cognição, vai ser pressuposto que o conceito de símbolo é primitivo e igualmente partilhado por todos os leitores (Allouche-2003).

III.1.2 - Signos e representações simbólicas

É variado o léxico referente a símbolos e expressões. No entanto, esta variedade enferma de enorme sobreposição semântica que perturba e confunde a exposição dos pressupostos em vigor. É essa sobreposição semântica que é destrinçada e ajustada no remanescente desta secção, com o intuito de clarificar os pressupostos em vigor.

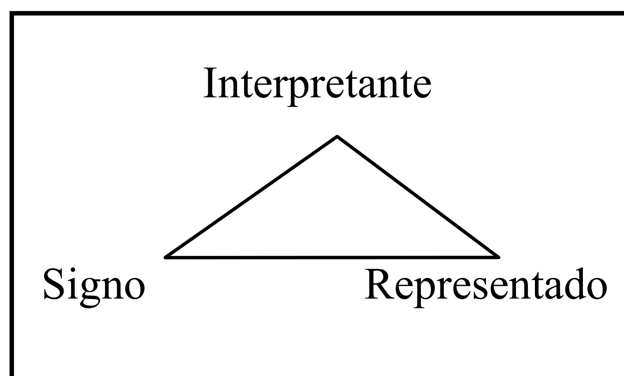


Fig. III.2: Tríade semiótica

Neste texto pressupõem-se os símbolos como os elementos, os articulantes mínimos, da semiótica cuja tríade fundamental, segundo Peirce (Peirce-1958), é o signo, o interpretante e o representado. Constitui-se o signo como representação simbólica do representado, por mediação, por actuação, por determinação do interpretante. É actualmente entendido que o interpretante não tem que ser necessariamente um humano, podendo ser uma outra entidade, até mesmo um dispositivo.

Esta tríada pode ser considerada isolada, não interagindo com outras. É, no entanto, possível considerar montagens em que o representado de uma é o signo de outra.

É pressuposto que:

- Existem quer interpretantes, quer representados, não necessariamente distintos.
- Para existirem signos, têm que haver interpretantes que os considerem como tal.
- Podem existir diversos interpretantes, com as concomitantes diversas interpretações, para um mesmo signo.

Surge aqui uma noção de simultaneidade - coincidência que importa descrever.

- O signo pode ser tomado como composto por partes coincidentes, diversas mas unas, simultaneamente presentes para o interpretante.
  [DIII.01] Diz-se que então que ocorre uma **concentração sígnica**, ou *fan-in*. ▲
- Por outro lado, o representado também pode ser tomado como composto por várias partes coincidentes, diversas mas unas, simultaneamente presentes para o interpretante.
  [DIII.02] Diz-se então que ocorre uma **dispersão sígnica**, ou *fan-out*. ▲

III.1.3 - Símbolos e Expressões

Com vista a coadjuvar a descrição e manipulação dos signos, enquanto representações simbólicas, apresentam-se as seguintes definições.

[DIII.03] Chama-se **expressão** a uma pluralidade finita, pluralidade essa eventualmente singular ou mesmo nula, de símbolos repetíveis e mutuamente distinguíveis. ▲

Por repetíveis entende-se que, numa expressão, o mesmo símbolo pode ocorrer várias vezes. Por mutuamente distinguíveis entende-se que, em toda e qualquer ocorrência, o símbolo é claramente discernível enquanto entidade individual, nunca se apresentando incompleto, misturado com outros ou sobreposto com ele próprio. Notar que:

a) Esta definição não impõe uma organização sequencial, por fiadas, aos símbolos constituintes da expressão.

b) De acordo com esta definição, um único símbolo não repetido pode ser chamado de expressão.

c) A ausência de todo e qualquer símbolo também pode ser chamada de expressão.

[DIII.04] Chama-se expressão nula à expressão sem símbolos. ▲

III.1.4 - Pontos de vista e expressões

[DIII.05] Chama-se **expressão válida** ou representação válida a uma expressão que seja um signo para, pelo menos, um interpretante. ▲

Um outro ponto de vista, pressuposto como equivalente, é o decorrente desta definição:

[DIII.06] Chama-se **expressão válida** ou representação válida a uma expressão para a qual é possível determinar, pelo menos, um representado. ▲

De acordo com a definição anterior, tanto um único símbolo como a ausência de símbolo podem ser considerados como expressões válidas, por mediação do interpretante adequado. É até possível considerar o seguinte resultado:

[T1.01] **H**: Seja dada uma expressão qualquer.

T: É sempre possível definir, pelo menos, um interpretante que a considere válida.

D: Basta considerar como interpretante aquele que, para qualquer expressão, considera que o representado é o valor lógico V. ■

Em consequência do teorema anterior, uma expressão válida é, muitas vezes, referida simplesmente como expressão.

[SIII.01] Saliente-se que, em termos de linguagens formais, é preciso definir como é que as pluralidades simbólicas podem ser organizadas, por fiadas e não só, e como a computação por aceitadores de linguagem define se a pluralidade constitui uma expressão válida ou não. Esta teoria é bem conhecida, sendo desenvolvida no âmbito das linguagens formais, como por exemplo em (Cohen-1997) e (Salomaa-1985), pelo que não é aprofundada neste texto. ♦

Pressupondo-se os símbolos como os articulantes mínimos, transmuta-se assim o "signo" de Peirce para "expressão". Doravante, neste texto, opta-se pelo discurso apoiado em símbolos e expressões, sendo preterido o discurso apoiado em signos.

III.1.5 - A perspectiva computacional

Esta perspectiva globaliza todos os desenvolvimentos semióticos como laborações intersimbólicas. Nas suas versões mais extremas, para esta perspectiva até o próprio substrato último da realidade física, não é de cariz energético ou de outra variável física legítima, mas é de cariz informacional, simbólico, assente em computações (Gruska-2000).

A perspectiva computacional pressupõe a seguinte definição.

[DIII.07] Nos casos em que o representado também pode ser considerado como uma expressão, é dado o nome de computado ou **resultado** ao representado, computação ou **processamento** ao processo interpretativo e o interpretante será um computador ou **processador**. ▲

Notar que na definição anterior o termo computador não se refere a uma máquina concreta mas a uma entidade que realiza uma computação. Neste sentido tanto um humano como um dispositivo podem ser computadores.

Sem pretender perder generalidade, doravante será pressuposto que o representado é sempre um resultado, logo um computado. Os computadores serão identificados por letras maiúsculas a negrito, em tipo "`Courier New`", como **`C`**.

Importa salientar que esta perspectiva computacional não pressupõe o determinismo, no sentido em que o mesmo computador e para a mesma expressão, não tem necessariamente de produzir sempre o mesmo resultado. Além disso uma determinada expressão não tem sequer de ser apresentada sempre ao mesmo computador, podendo-o ser a diversos e distintos computadores, que podem produzir resultados semelhantes ou distintos. Este raciocínio conduz-nos à seguinte definição.

[DIII.08] Uma expressão para a qual seja possível computar mais do que um resultado, também é referida como admitindo várias leituras ou possuindo várias valências.



No âmbito desta perspectiva, são muitas vezes utilizados, na prática, os termos ingleses *input* e *output*, para referir respectivamente a expressão apresentada ao computador e o resultado. Pressupõe-se assim o modelo computacional *input*, computação, *output*, (Kohavi-1970) (Booth-1967). Notar que na representação diagramática, onde está pressuposta uma leitura da esquerda para a direita, o computador é esquematizado por um rectângulo ao alto.

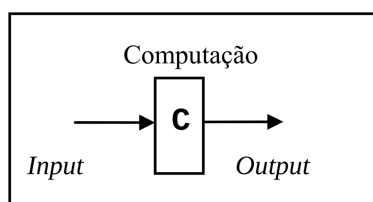


Fig. III.3: Modelo computacional

Este modelo computacional é exímio a permitir a interligação, pois o *output* de um computador pode ser o *input* de outro. As interligações podem ser praticadas usufruindo da total riqueza combinatória das montagens, quer puramente sequenciais, quer com retroacção, e com ou sem recurso a *fan-out* ou a *fan-in*.

III.2 - Sobre a notação

É sabido que para representar tudo o que é representável bastam dois símbolos, repetidamente usados, como Quine tão bem expõe no seu texto “Universal Library” (Quine-1989) e como corporizado no nosso quotidiano digital. Como também se sabe, uma notação binária pode ser vantajosa para as máquinas, mas é abominável para as pessoas.

Considera-se que a notação óptima é aquela que congrega o poder expressivo com a facilidade de uso. Para evitar representações vagas e ambíguas, a cada objecto deve corresponder uma representação específica e única. Tal requer que a notação tenha poder expressivo. Por outro lado, sem simplicidade não existe facilidade de uso. Sobrevém que o poder expressivo e a simplicidade são frequentemente incoadunáveis. Isto porque os cambiantes expressivos fluem no sentido das complexidades crescentes. Consequentemente, emerge a necessidade de um compromisso prático entre a facilidade de uso e o poder expressivo.

[EIII.01] Como exemplo efectivo deste compromisso prático considere-se o popular sinal $+$, tão fácil de usar. Quantas operações são representadas por ele? Tomado isoladamente, o seu poder expressivo é insuficiente, pois representa a soma aritmética, a soma algébrica, a soma vectorial, a soma lógica, a soma booleana, uma operação que seja um grupo comutativo, uma união de conjuntos, uma operação numa linguagem regular. Sem a informação adicional de que a soma é booleana, a expressão $1+1=1$ poderia ser considerada um erro. No entanto, normalmente a informação de contexto presente na envolvente à expressão obvia a tais dificuldades. Por outro lado, se for necessário referir, no mesmo episódio discursivo, quer a soma algébrica, quer a soma booleana, a situação pode tornar-se confusa, existindo autores que se socorrem de sinais alternativos, como $\vee$ ou $\oplus$, para discriminar convenientemente os vários tipos de soma envolvidos. ▼

Esta situação, em que, por vezes, é necessário alargar o léxico, de forma a discriminar adequadamente os representados no discurso, é também recorrente noutras áreas.

[EIII.02] A título de exemplo, considere-se que a palavra `plano` representa o nome de um ficheiro de computador. Em determinados contextos tal é o suficiente para se aceder correctamente ao ficheiro. Noutros, pode ser necessário acrescentar também a extensão, sendo necessário usar `plano.html` para o mesmo fim.

Ainda neste caso, se o acesso for de uma localização remota, pode ser necessário identificar o ficheiro de uma forma muito mais extensa, como seria o caso para `http://www.server.xpto/plano.html`. ▼

Esta prática, que consiste em utilizar uma representação frugal sempre que suficiente e uma representação dilatada quando necessário, combina de forma parcimoniosa a simplicidade com o poder expressivo. Será exercitada repetidamente para o desenvolvimento da notação empregue e convenções associadas.

III.2.1 - Desenvolvimento de novas notações

Como se viu em « II - Notação e convenções associadas» neste texto considera-se que a notação consiste no conjunto das convenções gráficas convenientemente partilhado por todos os leitores de modo a permitir a comunicação interlocutória. Este conjunto de convenções nem é absoluto, variando em última análise de leitor para leitor, nem imutável. Como é natural, por vezes, é necessário refinar notações antigas ou mesmo conceber notações novas. Depois, é necessário proceder à sua apresentação regular e divulgação. Considere-se por agora apenas a questão da concepção notacional.

Sendo a notação baseada em convenções, é tentador considerar que não é importante tecer considerações sobre quais são os símbolos usados, bastando apresentá-los e prosseguir com a sua utilização. Mas, para encadear um raciocínio, é necessário reconhecer padrões de símbolos e manipular segundo regras válidas a expressão em apreciação. Mesmo quando as leis são familiares, demora um momento decidir qual o resultado de um mais um. Qual o resultado da expressão $1+1$? Pode ser $1+1=1$ no caso booleano ou $1+1=10$ no caso binário.

Ao trocar os papéis tradicionais dos símbolos 0 e 1, Goodstein (Goodstein-1971) não aumentou a legibilidade do seu texto. De forma extrema, ao convencionar-se que x representa uma operação de somar e que $+$ representa uma incógnita, está-se a dificultar muito a tarefa do leitor e a induzir enganos. A questão notacional pode parecer desinteressante, mas pode constituir a diferença entre o êxito e o insucesso, (Schroeder-1997; Hehner-2004).

Em linha com o exposto, o desenvolvimento notacional aqui elaborado procura seguir os seguintes princípios orientadores:

a) Princípio da continuidade expressiva ou da reversibilidade inovacional

Qualquer nova notação que discrimine casos, indistintos para uma notação anterior, deverá ser obtida desta por imposição de elementos grafológicos, cuja omissão resulte na correcta aplicação da notação antiga. Por exemplo, o sinal de igual em $3+4=7$ pode ser modificado para indicar que se está a pretender dizer que o sete resulta da soma, $3+4 =: 7$; que o sete pode ser decomposto numa soma, $3+4 := 7$; ou, até mesmo, que um resulta do outro, indistintamente, $3+4 :=: 7$. Este ponto merece ser desenvolvido, o que ocorre já no seguimento.

b) Princípio da exaustão expressiva

Qualquer nova notação que necessite de discriminar vários casos deverá utilizar símbolos distintos para discriminar entre todos os casos possíveis e nunca reutilizar qualquer símbolo.

c) Princípio da simetria vertical

Quando a situação for comutativa, o respectivo símbolo deverá exibir simetria em relação o seu eixo vertical, não a devendo exibir quando o não for. Assim, tanto $a+b$ como $a \nparallel b$ representarão operações comutativas, enquanto que $a \nmid b$, representará uma operação não comutativa.

Como Hehner propõe, (Hehner-2004), também é possível aproveitar simetrias em torno do eixo horizontal, mas tal nível de detalhe não é relevante para este texto.

III.2.1.1 Desenvolvimento do sinal de igual

Para exemplificar de forma clara os princípios justamente expostos para o desenvolvimento notacional, consideremos o caso do habitual sinal de igual, $=$. Este sinal é intrinsecamente polissémico. Quando presente, como por exemplo numa expressão como $2+3=5$, pode querer dizer várias coisas, pode ser visto como tendo vários significados, tal como referido anteriormente. Coloca-se o problema de como comunicar o leitor qual o significado prioritário que o autor pretende comunicar, sem necessariamente inibir outros. Convém por isso identificar vários significados e explicitar qual o significado prioritário.

Um desses significados é o significado de “produção”, para o qual é estipulado o símbolo $=:$. O significado de produção afirma que somar dois com três tem cinco como resultado, $2+3 =: 5$. É um significado assimétrico, apenas um dos lados é que é resultado. Por isso, usando o princípio da continuidade expressiva, é imposto um pequeno elemento

grafológico cuja omissão resulta na correcta aplicação da notação antiga. No entanto, como a situação não é comutativa, o sinal resultante não exibe simetria relativamente ao eixo vertical. Notar que $5 =: 2+3$ pode ser interpretado como afirmando que cinco admite ser decomposto nas parcelas dois e três. E que é possível a simetria, em que um dos lados pode produzir o outro, como em $5 :=: 2+3$.

Outro desses significados é o significado de comparação para a igualdade. Para este significado é estipulado o símbolo $==$. Este símbolo exibe simetria vertical, uma vez que a situação é comutativa. Assim $2+3 == 5$ significa que se está a perguntar se um dos lados da comparação é igual ao outro, podendo o resultado ser V ou F. Tem-se pois que $(2+3 == 5) =: \mathsf{V}$

Outro significado é o de que algo é definido como igual a outra entidade. Para este significado é estipulado o símbolo $\doteq$. Assim $j \doteq \sqrt{-1}$.

Outro significado ainda é o da possibilidade de intercâmbio, visto que são iguais. Para este significado é estipulado o símbolo $\equiv$. Assim $5 =: 2+3 \equiv 3+2$.

De acordo com o princípio da exaustão expressiva, a todas as discriminações corresponde uma modificação do símbolo original por imposição de elementos grafológico. Esses elementos grafológicos, quando retirados, de acordo com o princípio da reversibilidade inovacional, resultam na correcta aplicação da notação antiga.

Assim, ao tecer considerações sobre operações, pode afirmar-se quer que $(: 2+3 = 5 :) = \mathsf{V}$ como que $(: 2+3 = 7 :) = \mathsf{F}$, mas também é considerado adequado expressar que $(2+3 == 5) =: \mathsf{V}$ e que $(2+3 == 7) =: \mathsf{F}$.

III.2.2 - A questão da autorepresentação simbólica

Os símbolos são natural e vocacionalmente polissémicos, nunca deixando de se representar a si próprios. Esta polissemia tem cariz variável e volátil, efémera subordinada aos interesses expressivos da ocasião. Relembre-se o símbolo π, sempre pronto e disponível para representar um número específico, uma partição, um plano ou outro ente.

Os possíveis significados, que a polissemia simbólica obriga a aceitar, não são todos considerados igualmente prioritários para a determinação do significado apropriado à leitura correcta. Por razões de ordem prática, a consideração da representação que um símbolo faz de

si mesmo é geralmente relegada para a prioridade mais baixa. No entanto, por vezes, interessa considerar o símbolo ele próprio.

Convenciona-se que, quando isolado e entre plicas, como 'π', qualquer símbolo representa-se apenas a si mesmo, não admitindo outras leituras, não admitindo ser interpretado como número, plano ou outra coisa que não ele próprio. Notar que uma leitura adequada de 'π' é «Pi entre plicas» ou «O símbolo pi», pois pi entre plicas é apenas o símbolo pi e, de outra forma, pode ser muitas mais coisas. Uma outra forma de referir o símbolo isolado entre plicas é dizer que é o símbolo literal. Um símbolo literal representa-se apenas a si mesmo. Para lidar com as plicas propriamente ditas, enquanto representantes de si mesmas, convenciona-se que ', a apóstrofe recta, representará sempre plicas isoladas e que não admitirá outras leituras. Desta forma '' representará apenas um par de plicas, e como é habitual, ' ', representará um espaço em branco entre plicas, pois assume-se que a diferença de espaçamento é suficientemente discernível. Se esta diferença de espaçamento se revelar insuficiente, para assegurar a discernibilidade, poder-se-á usar a forma alternativa ␢ para representar o espaço em branco. Muitas vezes é considerado pouco prático referir que o símbolo está entre plicas, pois tal é evidente e claramente visível, sem levantar dúvidas interpretativas. Assim, 'π' é na prática referido como o pi e ' ' como o espaço em branco, continuando no entanto '' a ser referido como um par de plicas e não como uma ausência de símbolo entre plicas. A próxima secção será justamente sobre a forma de representar a ausência de símbolo.

III.2.2.1 Representação da ausência de símbolo

Como visto, « III.2 - Sobre a notação », é assumido neste texto que os símbolos podem servir para representar tudo o que é representável. Por vezes é necessário representar a ausência de expressão, a ausência propositada de todo e qualquer símbolo, incluindo o espaço em branco. É assim necessária uma solução simbólica para representar a ausência de símbolo. É definido o símbolo específico, adequadamente representado entre plicas por '$\hat{\emptyset}$', para realizar essa tarefa.

Sempre que não rodeado por plicas, a leitura formal do símbolo '$\hat{\emptyset}$' é: "Aqui está propositadamente ausente qualquer símbolo" ou "Aqui está a expressão nula". Esta leitura é semelhante à leitura que se faz de frases como "Esta página está propositadamente em branco". Páginas assim são páginas vazias de conteúdo e que podem ser inesperadas. A frase

é colocada em documentos legais, manuais, exames e quaisquer outros documentos onde uma página acidentalmente em branco, por erro de impressão ou por outra causa, poderia ter graves repercussões, tendo por isso de ser devidamente salientado que estão propositadamente despidas de símbolos. Este símbolo '$\hat{\varnothing}$' é específica e mandatoriamente utilizado em todas as situações caracterizadas pela necessidade de referir a ausência de símbolo. A palavra “específica” determina que o símbolo '$\hat{\varnothing}$' não admite outras leituras. A palavra “mandatoriamente” determina que em todas as situações onde se tenha de simbolizar a ausência de símbolo, então é obrigatório usar'$\hat{\varnothing}$'.

Como o símbolo '$\hat{\varnothing}$' não admite outras leituras, sempre que aparece sem ser rodeado de plicas só pode ser interpretado como uma ausência de símbolo, um não símbolo. Assim "$\hat{\varnothing}$" também representa a fiada nula, "". Quando este símbolo for repetidamente escrito, este significado convencional “Aqui está propositadamente ausente qualquer símbolo” não se altera e isto mesmo que esteja entre plicas. Só há uma única situação em que este símbolo é encarado como o símbolo que é e não como indicando a ausência propositada de qualquer símbolo. Essa situação é quando isolado e rodeado por plicas. A leitura informal do símbolo '$\hat{\varnothing}$', quando não estiver entre plicas, tanto pode ser nada como nulo.

Relembrando que,

a) embora ao escrever um par de plicas se esteja propositadamente a omitir qualquer símbolo entre elas, a leitura adequada é tão somente um par de plicas,

b) só quando isolado e entre plicas é que um símbolo se representa exclusivamente a ele próprio,

obtêm-se as seguintes regras práticas:

'$\hat{\varnothing}$' representa um símbolo entre plicas e

'' representa um par de plicas.

'$\hat{\varnothing}\hat{\varnothing}$' também representa '', um par de plicas.

O uso deste símbolo é adequado apenas quando se pretende salientar de forma vincada a ausência de símbolo. Em termos correntes, significa isto que qualquer palavra lhe é indiferente.

[EIII.03] Por exemplo e sem perda de generalidade, a fiada "abc" também pode ser escrita "$a\hat{\varnothing}bc$" ou mesmo "$\hat{\varnothing}a\hat{\varnothing}\hat{\varnothing}b\hat{\varnothing}c\hat{\varnothing}\hat{\varnothing}\hat{\varnothing}$", mas tal é tão incómodo, deselegante e tão desnecessário como escrever os números naturais com um número variável de zeros à esquerda. Da mesma forma, quer a expressão $\{\}$, quer a expressão $\{\hat{\varnothing}\}$, constituem representações válidas do conjunto vazio. ▼

Notar que o símbolo '$\hat{\varnothing}$' é uno e coeso e que, tal como o vulgar 'i', o seu glifo tem graficamente duas componentes, o corpo e a marca diacrítica titulante.

No seguimento serão apreciados vários casos da sua utilização.

III.2.2.2 Considerações sobre fiadas unitárias e símbolos

Como se viu, pelo facto de um símbolo se representar sempre a si mesmo, podem colocar-se dificuldades expressivas para discriminar entre o representante e o representado, sendo utilizada a convenção baseada em plicas, de que um símbolo rodeado por plicas representa-se apenas a si mesmo, não admitindo outras leituras. Assim π pode representar um plano, mas 'π' apenas se representa a si mesmo.

Ocorre uma situação semelhante com fiadas. Convenciona-se que as fiadas formadas colocando qualquer símbolo entre aspas rectas duplas, '"', representa apenas a correspondente fiada de comprimento não plural, sendo propositadamente ignorada qualquer outra representação possível. Assim π pode representar um plano, mas "π" apenas representa a fiada unitária cujo único símbolo é 'π'. Notar que "π" representa uma fiada unitária, e que 'π' representa um símbolo. As fiadas unitárias não são símbolos, embora sejam representadas por símbolos. A fiada nula, "" = "$\hat{\varnothing}$" é distinta da ausência de símbolo, $\hat{\varnothing}$.

Não confundir:

"", uma representação da fiada nula,

'"', o símbolo de aspas rectas duplas colocado entre plicas,

" ", a fiada cujo único símbolo é o espaço em branco.

III.2.2.3 Considerações sobre fiadas e concatenações

Como visto, para salientar que determinada sequência de símbolos é para ser encarada preferencialmente apenas como uma fiada e não como outras expressões com as

concomitantes interpretações, são usadas aspas rectas duplas, como em "*abc*". Convém referir essa representação por um nome específico.

[DIII.09] Uma exibição sequencial de símbolos entre aspas rectas duplas constitui uma fiada finita em representação literal ou, simplesmente, uma **fiada literal**. ▲

Numa fiada literal todos os símbolos expostos são da fiada. Assim situações de fiadas não completamente explicitadas, como seja, por hipótese o caso de $ab\cdots bc$, uma fiada que comece pelo símbolo '*a*', termine num símbolo '*c*' e, entre eles, tenha um número indeterminado de símbolos '*b*', não admitem representações por fiadas literais, pois a fiada literal "$ab\cdots bc$" exibe cinco ocorrências simbólicas, a saber: uma vez os símbolos '*a*', '*c*' e '$\cdots$' e duas vezes o símbolo '*b*'.

A polissemia espreita. Por vezes $\{\}$ é visto como o conjunto vazio, tendo-se pois que $\{\}=\varnothing$. Por vezes $\{\}$ é visto como uma fiada, cuja representação literal é "$\{\}$", tendo-se então que $\{\}$ = "$\{\}$". Estas interpretações são mutuamente exclusivas. A informação de contexto será sempre suficiente para nunca permitir a conclusão "$\{\}$" = $\varnothing$.

[EIII.04] Como numa fiada literal as outras interpretações da expressão estão preferencialmente inibidas, tem-se que "$abc \wr cba$" $\neq$ "$abccba$". No entanto "abc"$\wr$"cba" = "$abccba$". ▼

[DIII.10] Na fiada literal as aspas iniciais e finais são também referidas como as aspas **literalizantes**. ▲

Quando se mencionam os símbolos de uma fiada literal não se entra em linha de conta com as aspas literalizantes.

[DIII.11] Na contabilização do comprimento das fiadas literais as aspas literalizantes não contam. ▲

[EIII.05] $\breve{\#}$"elefante" = 8 e $\breve{\#}$"" = 0. ▼

[SIII.02] Expressões como "*abc*, ou como *abc*", ou mesmo como "*abc*\" são consideradas inválidas enquanto representações de fiadas literais. Para evitar confusões o seu uso será evitado. ♦

Por vezes, é necessário considerar o uso de aspas rectas duplas no interior de uma fiada literal. Seguindo o uso comum a linguagens de programação como o C, (Kernighan-1988), é convencionado o uso do símbolo '\' como precedente inibidor a '"' e a ele próprio, sendo

inerte quando preceder outro símbolo. Esta utilização do símbolo '\' é como indicador de suspensão pontual da convenção de emprego das aspas rectas duplas, de forma a permitir elaborar fiadas literais que as contenham, como na fiada literal "a fiada \"elefante\"". Este símbolo de suspensão pontual da convenção é activo, apenas e especificamente, quando prefixo adjacente de '"' ou dele próprio. Significa isto que a fiada "*a*" é considerada como sendo constituída por dois símbolos, #̆"*a*" = 2, e que a fiada "\"" é considerada como sendo constituída por um símbolo, #̆"\"" = 1. Significa isto também que não está convencionado o significado de "elefante\".

Assim:

[EIII.06] A fiada "\"" representa a fiada cujo único símbolo é '"'. ▼

[EIII.07] A fiada "\\" representa a fiada cujo único símbolo é '\'. ▼

[EIII.08] A fiada "*a*" representa a fiada cujos símbolos são '\' e '*a*'. ▼

[DIII.12] São consideradas concatenadas fiadas literais escritas de forma adjacente. ▲

[EIII.09] Tem-se que "ele""fante" = "ele"∤"fante" = "elefante", e """" = ""∤"" = "". ▼

Numa fiada literal não existe forma de representar a fiada nula. Para representar fiadas nulas conjuntamente com fiadas literais é necessário explicitá-lo utilizando a concatenação de fiadas nulas com fiadas literais.

[EIII.10] Tem-se que "ele"∤""∤"fante" = "elefante". ▼

[SIII.03] Estas considerações das subtilezas formais relativas às fiadas e às formas de as descrever são bem conhecidas e tratadas no âmbito das linguagens formais, pelo que não serão mais aprofundadas. ♦

Um símbolo, p. ex. '*a*', é considerado distinto da fiada constituída exclusivamente por uma sua ocorrência, "*a*", como visto. Aliás, '*a*' enquanto símbolo, não é considerado uma fiada, pelo que não se encontra definido o significado de #̆'*a*', embora já se possa afirmar que #̆"*a*" é um. Notar que '*a*', enquanto símbolo, não é uma fiada e que enquanto fiada, "*a*", não é um símbolo.

III.2.2.4 Distinção entre a ausência de símbolo e a fiada nula.

Neste momento convém salientar bem a distinção entre a expressão nula, $\hat{\varnothing}$, e a fiada nula, $""$, pois uma expressão não tem de ser uma fiada. Como referido nos pressupostos, a fiada nula é o elemento neutro da operação de concatenação entre fiadas, $\nmid$, da mesma forma que o número 0 é o elemento neutro da soma. A expressão $3+0+4$ tem 7 como resultado, pois zero é um número. A expressão $"n" \nmid "" \nmid "m"$, tem $"nm"$ como resultado, pois $""$ é uma fiada. A expressão $3+\hat{\varnothing}+4$ é considerada equivalente à expressão $3++4$, que não é uma expressão algébrica correcta e para a qual não se pode dizer que tem o 7 como resultado. A expressão $"n" \nmid \hat{\varnothing} \nmid "m"$ é considerada equivalente à expressão $"n" \nmid \nmid "m"$, que não é uma expressão de concatenação correcta e, para a qual, não se pode dizer que tem $"nm"$ como resultado.

III.3 - Súmula

Neste capítulo foram elaboradas as apresentações, quer dos símbolos e sua utilização, quer da ausência de símbolo, enquanto suportes de toda a computação.

No próximo é alegado que, para lidar correctamente com a tolerância, consequente da ausência de símbolo, a lógica envolvida deverá ser pelo menos a trivalente, sendo a bivalente insuficiente.

IV - Tolerância e lógica trivalente

Neste capítulo é alegado que, para lidar correctamente com a tolerância, abstraída na ausência de símbolo, a lógica envolvida deverá ser pelo menos a trivalente. É pois necessário esclarecer como se utiliza uma lógica trivalente.

IV.1 - A lógica trivalente

É necessário abordar a questão do tratamento lógico de expressões onde conste a ausência de símbolo. São possíveis expressões, como $\hat{\varnothing} = \hat{\varnothing}$, para as quais não é possível concluir se devem ser consideradas verdadeiras ou falsas. É assim constatada uma insuficiência da lógica a dois valores.

A lógica a dois valores também pode ser chamada de lógica bivalente, ou bilógica. A lógica bivalente é a lógica clássica, estudada tanto por Aristóteles como por legiões de escolásticos medievais, e também por G. Boole e todos os actuais profissionais de sistemas digitais. Um seu valor lógico qualquer poderá ser chamado por bivalor, para salientar o facto de que é um dos dois valores possíveis, sem possibilidade de mistura entre eles ou de surgimento de mais qualquer outro. Surge assim o princípio do terceiro excluído.

A lógica bivalente é incontornável, desde as aplicações tecnológicas até às construções léxico semânticas no quotidiano da linguagem natural, da linguagem comum. Apresenta-se quer como intuitiva, quer como intuitivamente correcta. Os valores da lógica a dois valores, os bivalores possíveis, são representados por $\ddot{V}$, $\ddot{F}$, reflectindo a intuição semântica para "verdadeiro" e "falso". Esta representação por $\ddot{V}$, $\ddot{F}$ admite a representação simplificada V, F quando o contexto é tal que a única lógica em vigor é a habitual lógica bivalente. Outras línguas, outras realidades, outras intuições, podem preferir representar os bivalores por T, F, ou por 0, 1.

Além disso existem como constituintes basilares da linguagem os elementos primordiais para a sua utilização, como o "ou", o "e", e o "não", cujos significados comuns e intuitivos espelham e reproduzem os respectivos significados bilógicos formais. Surge assim naturalmente a capacidade de, com comodidade, verbalizar em linguagem natural aquilo que é expresso por proposições bilógicas formais. Neste contexto é fácil e tentador sucumbir à

falácia redutora de que toda a lógica é evidentemente bivalente e de que o princípio do terceiro excluído é forçosamente válido em absoluto.

No entanto, já Aristóteles questionava a aplicação do princípio do terceiro excluído a proposições alusivas a contingências futuras, como "amanhã chove", para as quais não é possível determinar qual o seu valor bilógico. É bem sabido que esta perspectiva foi defendida como válida tanto pelos autores clássicos como medievais. Além disso constituiu uma das principais forças motivadoras para o trabalho de Lukasiewicz sobre as lógicas n-valentes (Trzesicki-1990).

De seguida, vai proceder-se à exposição de um sistema de lógica trivalente, suficiente para os nossos objectivos. Note-se que uma lógica trivalente pode parecer contra intuitiva, pois a linguagem natural não dispõe de construções léxicas simples para a sua verbalização, mas a sua necessidade é imposta pelo facto de que, ao admitirmos tolerância a uma operação bilógica, estamos de facto a lidar com uma realidade trivalente (Rato-2008c).

[SIV.01] Existem linguagens naturais, como a Aymara, uma das linguagens oficiais do Peru, que dispõem de construções léxico semânticas adequadas à elaboração de afirmações num pressuposto de lógica trivalente. ♦

IV.1.1 - Combinatória de trivalores

Na manipulação de trivalores, no sentido de DIV.01, convém distinguir a questão combinatória da interpretação semântica. No seguimento vão ser elaboradas algumas considerações sobre os aspectos combinatórios da manipulação de trivalores, na linha do apresentado por Post (Post-1921).

As tabelas onde as operações possíveis são exaustivamente descritas são chamadas de «tabelas de triverdade», nome este baseado na designação tradicional de «tabelas de verdade». No entanto estas tabelas apenas enumeram as possibilidades combinatórias, sem pressupor nenhuma interpretação em termos de verdade ou falsidade.

É sabido que não é possível desenvolver uma álgebra de Boole a três valores (Serro-03). Pelo que a manipulação de trivalores não se pode basear numa estrutura algébrica tão bem conhecida e explorada como a das álgebras de Boole, sendo necessário lançar as bases conceptuais da sua manipulação a partir de outros pontos de partida. Além disso a técnica da demonstração, num contexto trivalente, não poderá fazer uso do princípio do terceiro

excluído, pelo que se preferirá a demonstração por inspecção exaustiva dos casos possíveis, uma vez que estes são em número finito e acessível.

IV.1.1.1 Trivalores

[DIV.01] Os três valores lógicos, ou **trivalores**, são representados pelos símbolos '0', '1' e '2'. ▲

[nDIV.01] Não fica definida qualquer correspondência entre os bivalores $\ddot{V}$, $\ddot{F}$ e os trivalores 0, 1 e 2. ▲

[nDIV.02] Não fica definida qualquer correspondência entre os inteiros 0, 1, 2 e os trivalores 0, 1 e 2. ▲

Não está definida qualquer correspondência mas esta escolha de símbolos '0', '1' e '2' não é inocente. Pretende ter utilidade mnemónica, facilitadora de futuras manipulações operativas. Convém no entanto ter sempre presente que os trivalores não são números inteiros. Os trivalores são tão-somente representados convencionalmente por 0, 1 e 2 embora também se pudessem definir convenções alternativas, como por exemplo aquela em que os trivalores seriam representados pelos símbolos 'a', 'b' e 'c'.

[DIV.02] Fica definida uma ordem total implícita, $\succ$, entre os trivalores 2, 1 e 0, tendo-se que $2 \succ 1 \succ 0$, que também pode ser escrita como $0 \prec 1 \prec 2$. ▲

Esta ordenação é não fundamental, meramente auxiliar e de cariz mnemónico-facilitador.

[DIV.03] De acordo com esta ordem total implícita, diz-se que:

0 é menor que 1 e menor que 2,

1 é maior que 0 e menor que 2,

2 é maior que 0 e maior que 1. ▲

IV.1.1.2 Operações binárias

Defina-se o seguinte par de operações binárias:

[DIV.04] Com símbolo $\ddot{\wedge}$, e com a designação de AND trivalente ou tri-AND:

Tabela IV.1: AND trivalente

$\ddot{\wedge}$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2



[DIV.05] Com símbolo $\ddot{\vee}$ e com a designação de OR trivalente ou tri-OR:

Tabela IV.2: OR trivalente

$\ddot{\vee}$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2



Estas regras de operação são combinatórias e não devem ser interpretadas como extensões da lógica bivalente. Nesta descrição combinatória está-se apenas a apresentar a definição de operações binárias num conjunto de três elementos. Notar que são estas tabelas que definem as operações. A ordenação implícita atrás apresentada é meramente auxiliar, não se constituindo como vinculativa. Mas é facilitadora da memorização das definições, pois permite intuir que o tri-AND tem como resultado o menor dos argumentos e que o tri-OR tem como resultado o maior dos argumentos.

Por inspecção directa das tabelas é possível concluir que estas operações são comutativas.

IV.1.1.3 Notação infix

É possível escrever as regras de transformação anterior em notação *infix*, de cariz binária. Eis alguns exemplos.

[EIV.11] Tem-se assim que $0 \ddot{\wedge} 1 =: 0$. ▼

[EIV.12] Tem-se assim que $(0 \ddot{\vee} 2) \ddot{\vee} 1 \equiv 0 \ddot{\vee} (2 \ddot{\vee} 1) =: 2$. ▼

[EIV.13] Tem-se assim que $(1 \ddot{\wedge} 2) \ddot{\wedge} 1 \equiv 1 \ddot{\wedge} (2 \ddot{\wedge} 1) =: 1$. ▼

IV.1.1.4 Operações unárias

As operações unárias que se revestem de interesses para o presente texto são representadas com a titulação pelos símbolos '$\barwedge$' para a negação ascendente ou directa e '$\veebar$' para a negação descendente, indirecta ou retrógrada. Tem-se:

[DIV.06] Define-se a **negação ascendente** como

$\overset{\barwedge}{0} =: 1$
$\overset{\barwedge}{1} =: 2$
$\overset{\barwedge}{2} =: 0$



[DIV.07] Define-se a **negação descendente** como

$\overset{\veebar}{0} =: 2$
$\overset{\veebar}{1} =: 0$
$\overset{\veebar}{2} =: 1$



Uma anula a outra, no sentido em que $\overset{\veebar}{\left(\overset{\barwedge}{0}\right)} \equiv \overset{\barwedge}{\left(\overset{\veebar}{0}\right)} =: 0$. Como não existem ambiguidades é possível retirar os parêntesis, tendo-se que $\overset{\veebar}{\overset{\barwedge}{0}} \equiv \overset{\barwedge}{\overset{\veebar}{0}} =: 0$. Notar que em expressões como $\overset{\veebar}{(\cdots)}$ a negação é aplicada ao resultado da expressão entre parêntesis.

Além disso não são independentes, pois aplicar duas vezes uma equivale a aplicar a outra, como em $\hat{\left(\hat{\mathtt{0}}\right)} \equiv \check{\mathtt{0}} =: \mathtt{2}$. Como também não existem ambiguidades é possível retirar os parêntesis, tendo-se que $\hat{\hat{\mathtt{0}}} \equiv \check{\mathtt{0}} =: \mathtt{2}$ e que $\check{\check{\mathtt{0}}} \equiv \hat{\mathtt{0}} =: \mathtt{1}$.

[SIV.02] Pretende-se apresentar um sistema prático que partindo de poucas funções base seja completo do ponto de vista funcional, no sentido em que qualquer função definível por uma tabela de triverdade pode ser expressa usando apenas e exclusivamente as funções base do sistema. Como é sabido, se a um conjunto de funções funcionalmente completo for acrescentada mais uma função, o conjunto resultante ainda é funcionalmente completo e embora não minimize o número funções utilizadas pode mesmo assim a sua utilização ser tanto mais fácil como mais prática. ♦

IV.1.1.5 Variáveis trivalentes

É possível definir variáveis trivalentes, que assumem um trivalor. Seja x uma variável trivalente, sem mais restrições. Então x pode assumir qualquer um dos trivalores, $\mathtt{0}$, $\mathtt{1}$ ou $\mathtt{2}$.

As notações anteriormente apresentadas, quer as de cariz binário quer as de cariz unário, são directamente aplicáveis às variáveis trivalentes, tal como eram aplicadas directamente aos trivalores.

Estas variáveis trivalentes podem participar em expressões com as operações trivalentes atrás definidas.

[EIV.14] Como exemplo de expressões trivalentes onde participam quer variáveis, quer constantes, têm-se que $\mathtt{2} \mathbin{\dddot{\vee}} x =: \mathtt{2}$, ou então que $\hat{\mathtt{2}} \mathbin{\dddot{\vee}} x =: x$, ou ainda que $\left(x \mathbin{\dddot{\wedge}} \hat{x}\right) \mathbin{\dddot{\vee}} \left(x \mathbin{\dddot{\wedge}} \check{x}\right) \mathbin{\dddot{\vee}} \left(\hat{x} \mathbin{\dddot{\wedge}} \check{x}\right) =: \mathtt{1}$. ▼

[EIV.15] Como exemplo de expressões trivalentes onde participam apenas variáveis, têm-se que $\hat{x} \mathbin{\dddot{\vee}} x \equiv x \mathbin{\dddot{\vee}} \hat{x}$, ou ainda que $\hat{x} \mathbin{\dddot{\wedge}} x \equiv x \mathbin{\dddot{\wedge}} \hat{x}$. ▼

IV.1.1.6 Associatividade e distributividade

Por verificação, em todos os vinte e sete casos por cada operação, $\ddot{\wedge}$ ou $\ddot{\vee}$, é possível concluir que estas operações são associativas.

Por verificação de todos os casos envolvidos também é possível concluir pela distributividade, quer no caso $x \ddot{\wedge} (a \ddot{\vee} b) \equiv (x \ddot{\wedge} a) \ddot{\vee} (x \ddot{\wedge} b)$, quer no caso $x \ddot{\vee} (a \ddot{\wedge} b) \equiv (x \ddot{\vee} a) \ddot{\wedge} (x \ddot{\vee} b)$.

IV.1.1.7 Dualidades e convenções de numeração

Para uma dada operação binária, representem-se os trivalores por A, v, N, onde A tem o significado operativo de Absorvente e N tem o significado operativo de Neutro.

Seja θ a referida operação binária, que tanto pode ser tabelada desta forma

Tabela IV.3: Primeira forma da operação θ

θ	A	v	N
A	A	A	A
v	A	v	v
N	A	v	N

onde são evidentes as semelhanças com a operação $\ddot{\wedge}$, como também pode ser tabelada desta outra forma

Tabela IV.4: Segunda forma da operação θ

θ	N	v	A
N	N	v	A
v	v	v	A
A	A	A	A

onde são evidentes as semelhanças com a operação $\ddot{\vee}$.

Isto é possível porque se constata que existe uma dualidade, em que o elemento absorvente de $\ddot{\vee}$ é o elemento neutro de $\ddot{\wedge}$ e onde o elemento neutro de $\ddot{\vee}$ é o elemento absorvente de $\ddot{\wedge}$.

Tem-se até que $\overset{\barwedge}{\left(x \dddot{\vee} \overset{\barwedge}{x} \dddot{\vee} \overset{\veebar}{x} \right)} \equiv \overset{\veebar}{\left(x \dddot{\wedge} \overset{\barwedge}{x} \dddot{\wedge} \overset{\veebar}{x} \right)}$ e que $\overset{\veebar}{\left(x \dddot{\vee} \overset{\barwedge}{x} \dddot{\vee} \overset{\veebar}{x} \right)} \equiv \overset{\barwedge}{\left(x \dddot{\wedge} \overset{\barwedge}{x} \dddot{\wedge} \overset{\veebar}{x} \right)}$.

O que é importante reter é que é a combinatória operativa de trivalores que determina as propriedades da operação, do conjunto de resultados. O trivalor que é absorvente numa operação não tem de também o ser numa outra operação. O mesmo se passa para um trivalor que seja elemento neutro. Para uma dada operação, pelo seu conjunto de resultados, é por vezes possível identificar elementos neutros e/ou absorventes. Ser absorvente ou neutro é específico da operação e do trivalor, não apenas do trivalor.

Sendo assim relembre-se a convenção de ordem, em que o elemento neutro de $\ddot{\vee}$ é o menor dos trivalores e que o elemento neutro de $\ddot{\wedge}$ é o maior dos trivalores. Usando esta convenção é possível numerar em base três os trivalores de tal forma que se conserva a ordem convencionada. Ou seja, assume-se agora o caso particular em que os trivalores são os números inteiros 0, 1 e 2. Sendo assim, como qualquer tabela de triverdade de n variáveis terá 3^n entradas, é possível representar cada uma das entradas por um número de ordem característico, i, que será um inteiro não negativo, desde zero até $3^n - 1$. Veja-se como.

Nesta situação em que se têm 3^n entradas, estipule-se uma numeração para as n variáveis, que serão assim sequencialmente identificadas desde x_{n-1} até x_0. Relembre-se que nesta situação, qualquer uma variável $x_{k,\ 0 \le k < n}$, poderá assumir qualquer dos valores inteiros $0,1,2$. Desta forma a cada uma das entradas na tabela é possível fazer corresponder o número de ordem característico $i = \sum_{k=0}^{k=n-1} x_k 3^k$.

Este somatório representa o número i expresso em base três.

Numa tabela de triverdade, cada uma das entradas i pode dar origem a um de três resultados distinto, r_i, $r_i \in \{0\ 1\ 2\}$ ao qual é possível fazer corresponder o número $r_i 3^i$. No caso das operações binárias, $n \equiv 2$ pelo que existem nove números i possíveis, desde $i \equiv 0$ para a entrada correspondente a $x_1 \equiv 0, x_0 \equiv 0$, até $i \equiv 8$, correspondente à entrada em que $x_1 \equiv 2, x_0 \equiv 2$.Uma operação binária, θ, pode ser assim identificada por um número $\nu = \sum_{i=0}^{8} r_i 3^i$, podendo-se falar de θ_ν. Este número é único, desde que se conserve a numeração

ordenativa para as n variáveis. No caso das operações binárias comutativas, este número é único, independentemente da ordenação das variáveis.

Tabela IV.5: Operação $\ddot{\vee}$

[EIV.16] A operação $\ddot{\vee}$ pode ser tabelada como

x_1	x_0	r_i para $\ddot{\vee}$	i	$r_i 3^i$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	3
0	2	2	2	18
1	0	1	3	27
1	1	1	4	81
1	2	2	5	486
2	0	2	6	1458
2	1	2	7	4374
2	2	2	8	13122

pelo que $\nu = 3 + 18 + 27 + 81 + 486 + 1458 + 4374 + 13122 = 19569$. ▼

Tabela IV.6: Operação $\ddot{\wedge}$

[EIV.17] A operação $\ddot{\wedge}$ pode ser tabelada como

x_1	x_0	r_i para $\ddot{\wedge}$	i	$r_i 3^i$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	2	0	2	0
1	0	0	3	0
1	1	1	4	81
1	2	1	5	243
2	0	0	6	0
2	1	1	7	2187
2	2	2	8	13122

pelo que $\nu = 81 + 243 + 2187 + 13122 = 15633$. ▼

Desta forma é possível falar de θ_ν, tendo-se que $\ddot{\vee} \equiv \theta_{19569}$ e que $\ddot{\wedge} \equiv \theta_{15633}$. Estabelecida esta numeração funcional, extensível a operações de qualquer aridade, cessa por agora este caso particular em que os trivalores são os números inteiros 0, 1 e 2.

O número de possíveis operações binárias é $3^9 = 19683$. No entanto, como se verá, qualquer uma delas pode ser expressa usando apenas negações, OR trivalentes e AND trivalentes.

IV.1.1.8 Algumas expressões trivalentes úteis

Para lidar adequadamente com as expressões trivalentes convém estabelecer algumas identidades úteis para referência futura. Uma dessas expressões, já anteriormente exemplificada, é $\left(x \overset{\cdots}{\wedge} \hat{x}\right) \overset{\cdots}{\vee} \left(x \overset{\cdots}{\wedge} \overset{\vee}{x}\right) \overset{\cdots}{\vee} \left(\hat{x} \overset{\cdots}{\wedge} \overset{\vee}{x}\right) =: \mathtt{1}$. Outra é $\left(x \overset{\cdots}{\vee} \hat{x}\right) \overset{\cdots}{\wedge} \left(x \overset{\cdots}{\vee} \overset{\vee}{x}\right) \overset{\cdots}{\wedge} \left(\hat{x} \overset{\cdots}{\vee} \overset{\vee}{x}\right) =: \mathtt{1}$.

Além disso, tem-se que:

$\left(x \overset{\cdots}{\wedge} \hat{x}\right) \overset{\cdots}{\vee} \left(x \overset{\cdots}{\wedge} \overset{\vee}{x}\right)$ só pode produzir o valor $\mathtt{0}$ se $x \equiv \mathtt{0}$. Em qualquer dos outros casos possíveis, ou seja se $x \equiv \mathtt{1}$ ou se $x \equiv \mathtt{2}$, ter-se-á que a expressão produz o valor $\mathtt{1}$.

$\left(x \overset{\cdots}{\vee} \hat{x}\right) \overset{\cdots}{\wedge} \left(x \overset{\cdots}{\vee} \overset{\vee}{x}\right)$ só pode produzir o valor $\mathtt{2}$ se $x \equiv \mathtt{2}$. Em qualquer dos outros casos possíveis, ou seja se $x \equiv \mathtt{1}$ ou se $x \equiv \mathtt{0}$, ter-se-á que a expressão produz o valor $\mathtt{1}$.

$\left(\hat{x} \overset{\cdots}{\wedge} x\right) \overset{\cdots}{\vee} \left(\hat{x} \overset{\cdots}{\wedge} \overset{\vee}{x}\right)$ só pode produzir o valor $\mathtt{0}$ se $x \equiv \mathtt{2}$. Em qualquer dos outros casos possíveis, ou seja se $x \equiv \mathtt{1}$ ou se $x \equiv \mathtt{0}$, ter-se-á que a expressão produz o valor $\mathtt{1}$.

$\left(\hat{x} \overset{\cdots}{\vee} x\right) \overset{\cdots}{\wedge} \left(\hat{x} \overset{\cdots}{\vee} \overset{\vee}{x}\right)$ só pode produzir o valor $\mathtt{2}$ se $x \equiv \mathtt{1}$. Em qualquer dos outros casos possíveis, ou seja se $x \equiv \mathtt{0}$ ou se $x \equiv \mathtt{2}$, ter-se-á que a expressão produz o valor $\mathtt{1}$.

$\left(\overset{\vee}{x} \overset{\cdots}{\wedge} x\right) \overset{\cdots}{\vee} \left(\overset{\vee}{x} \overset{\cdots}{\wedge} \hat{x}\right)$ só pode produzir o valor $\mathtt{0}$ se $x \equiv \mathtt{1}$. Em qualquer dos outros casos possíveis, ou seja se $x \equiv \mathtt{0}$ ou se $x \equiv \mathtt{2}$, ter-se-á que a expressão produz o valor $\mathtt{1}$.

$\left(\overset{\vee}{x} \overset{\cdots}{\vee} x\right) \overset{\cdots}{\wedge} \left(\overset{\vee}{x} \overset{\cdots}{\vee} \hat{x}\right)$ só pode produzir o valor $\mathtt{2}$ se $x \equiv \mathtt{0}$. Em qualquer dos outros casos possíveis, ou seja se $x \equiv \mathtt{1}$ ou se $x \equiv \mathtt{2}$, ter-se-á que a expressão produz o valor $\mathtt{1}$.

Das expressões anteriores pode concluir-se:

Para obter `2` quando $x \equiv 0$, e `1` nos outros casos deverá usar-se $\left(\check{x} \dddot{\vee} x\right) \dddot{\wedge} \left(\check{x} \dddot{\vee} \hat{x}\right)$.

Para obter `2` quando $x \equiv 1$, e `1` nos outros casos deverá usar-se $\left(\hat{x} \dddot{\vee} x\right) \dddot{\wedge} \left(\hat{x} \dddot{\vee} \check{x}\right)$.

Para obter `2` quando $x \equiv 2$, e `1` nos outros casos deverá usar-se $\left(x \dddot{\vee} \hat{x}\right) \dddot{\wedge} \left(x \dddot{\vee} \check{x}\right)$.

Para obter `0` quando $x \equiv 0$, e `1` nos outros casos deverá usar-se $\left(x \dddot{\wedge} \hat{x}\right) \dddot{\vee} \left(x \dddot{\wedge} \check{x}\right)$.

Para obter `0` quando $x \equiv 1$, e `1` nos outros casos deverá usar-se $\left(\check{x} \dddot{\wedge} x\right) \dddot{\vee} \left(\check{x} \dddot{\wedge} \hat{x}\right)$.

Para obter `0` quando $x \equiv 2$, e `1` nos outros casos deverá usar-se $\left(\hat{x} \dddot{\wedge} x\right) \dddot{\vee} \left(\hat{x} \dddot{\wedge} \check{x}\right)$.

IV.1.1.9 Diagramas combinatórios ou montagens

É possível estabelecer diagramas combinatórios com base nestas transformações, baseados nos diagramas utilizados para os circuitos combinatórios digitais. Estes diagramas combinatórios são constituídos por linhas orientadas e rectângulos, sem realimentações.

As linhas orientadas, , representam variáveis. As linhas podem exibir derivações, como , sem deixarem de ser consideradas como uma mesma e única linha. Ao longo de toda uma linha, com ou sem derivações, o trivalor correspondente à variável representada é sempre o mesmo. Em cada instante uma linha, na sua totalidade, assume um e um só dos trivalores. A orientação das linhas fornece indicação sobre se o trivalor deve ser considerado como resultante de uma operação ou como indo ser operado.

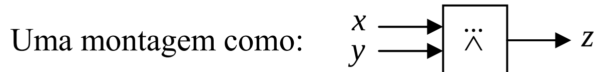
Os rectângulos, também chamados blocos, executam a operação exibida. Os rectângulos têm sempre ligado o número de linhas correspondentes à aridade da respectiva operação e com as orientações correctas.

Para as operações atrás definidas, a sua estrutura geral será:



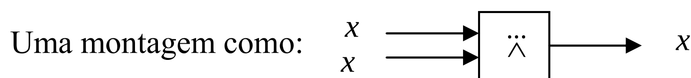
Estes quatro blocos constituem os quatro blocos base. Um diagrama também pode ser referido como uma montagem, especialmente se for constituído por várias linhas e rectângulos.

Uma montagem como:



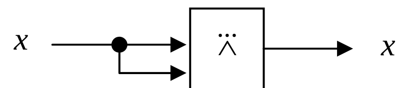
representará uma expressão como $x \ddot{\wedge} y =: z := y \ddot{\wedge} x$

Uma montagem como:

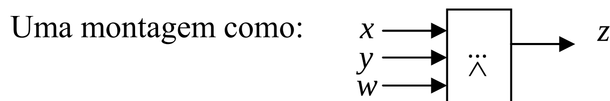


representará uma expressão como $x \ddot{\wedge} x =: x$.

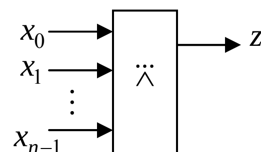
Estas expressões também podem ser expressas por montagens como



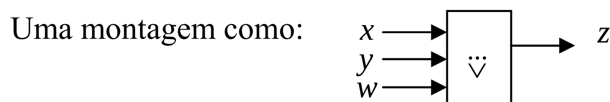
Uma montagem como:



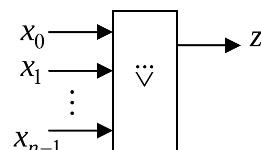
representará uma expressão como $x \ddot{\wedge} y \ddot{\wedge} w =: z$, onde devido à comutatividade e associatividade, é indiferente para a obtenção do resultado final quer a ordem dos argumentos quer a ordem de execução. Esta montagem pode ser generalizada para n, um número arbitrário de argumentos:



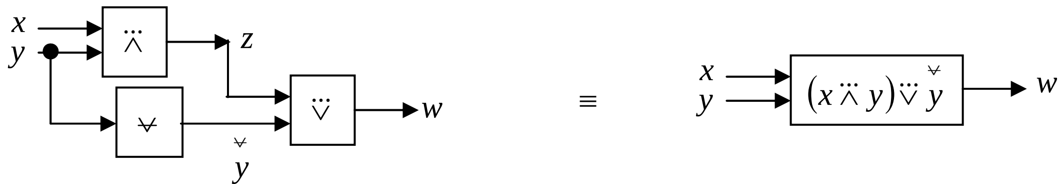
Uma montagem como:



representará uma expressão como $x \ddot{\vee} y \ddot{\vee} w =: z$, onde devido à comutatividade e associatividade, é indiferente para a obtenção do resultado final quer a ordem dos argumentos quer a ordem de execução. Esta montagem pode ser generalizada para n, um número arbitrário de argumentos:

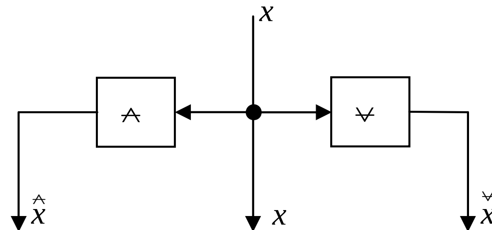


Montando vários blocos base é possível obter novos blocos, como em:



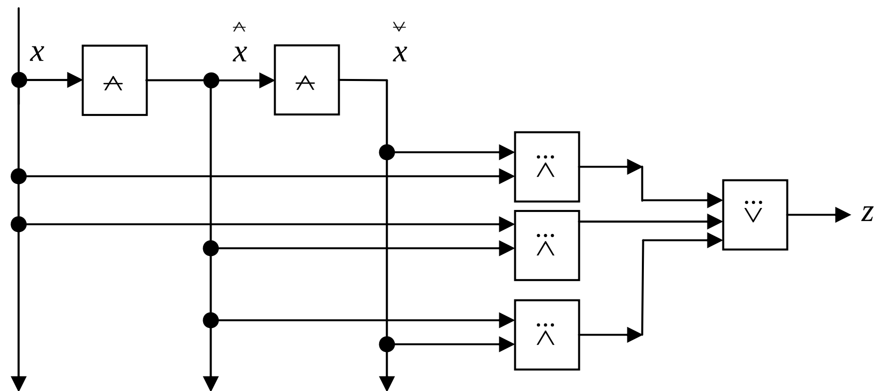
Esta possibilidade de construir novos blocos a partir dos quatro blocos base é muito necessária na prática.

Uma montagem como



permitirá obter todos os trivalores, independentemente do valor da variável.

Uma montagem como



representa a expressão: $\left(x \dddot{\wedge} \overset{\vee}{x}\right) \dddot{\vee} \left(x \dddot{\wedge} \hat{x}\right) \dddot{\vee} \left(\hat{x} \dddot{\wedge} \overset{\vee}{x}\right) =: z \equiv 1$, que permite obter o mesmo trivalor independentemente do trivalor da variável x.

Uma propriedade importante destes diagramas de montagem é que é sempre possível "lê-los", ou seja, determinar qual a expressão representada, bem como também é sempre possível, partindo da expressão, remontar o diagrama original.

Uma outra característica importante é que é sempre possível determinar qual é a tabela de triverdade correspondente ao diagrama apresentado. No seguimento vai ser descrito como é possível, partindo da tabela de triverdade, obter uma montagem que o realize.

IV.1.1.10 Tabelas de verdade, expressões e montagens

Vai agora ser elaborada a descrição de que como é possível, dada uma tabela de triverdade qualquer, sintetizar a montagem que a realiza e concomitantemente determinar a expressão que a representa.

Comece-se por notar o seguinte facto: em qualquer tabela de triverdade é sempre possível determinar os três seguintes conjuntos: O conjunto das entradas cujo resultado é $\mathtt{0}$, cujo cardinal é o, o conjunto das entradas cujo resultado é $\mathtt{1}$, cujo cardinal é q e finalmente o conjunto das entradas cujo resultado é $\mathtt{2}$, cujo cardinal é p. Estes três conjuntos são disjuntos e a sua união é o conjunto da totalidade das entradas na tabela de triverdade. Ou seja, $p+q+o$ representa o número de entradas na tabela de triverdade.

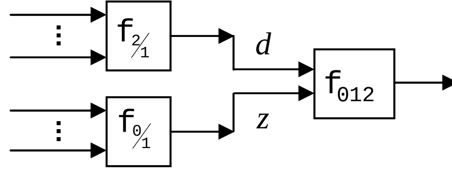
Para continuar, pressuponha-se que para toda e qualquer tabela de triverdade é sempre possível determinar uma função $\mathtt{f}_{2/1}$. Esta função, específica para cada tabela de triverdade, é sempre caracterizada pela propriedade que só exibe duas saídas distintas, $\mathtt{2}$ sse a entrada pertencer ao conjunto das entradas cujo resultado é $\mathtt{2}$, e $\mathtt{1}$ para todas as outras entradas.

Pressuponha-se também que para toda e qualquer tabela de triverdade é sempre possível determinar uma função $\mathtt{f}_{0/1}$. Esta função, específica para cada tabela de triverdade, é sempre caracterizada pela propriedade que só exibe duas saídas distintas, $\mathtt{0}$ sse a entrada pertencer ao conjunto das entradas cujo resultado é $\mathtt{0}$, e $\mathtt{1}$ para todas as outras entradas. Estabeleça-se agora que a saída de $\mathtt{f}_{2/1}$ é a variável d e que a saída de $\mathtt{f}_{0/1}$ é a variável z.

Estas duas variáveis, d e z, são as entradas numa função de dois argumentos

$\mathtt{f}_{012} \doteq \left(\overset{\veebar}{z}\,\overset{\barwedge}{\ddot{\vee}}\,\overset{\veebar}{d}\right)$. Esta função está montada de tal forma, a jusante de $\mathtt{f}_{2/1}$ e de $\mathtt{f}_{0/1}$, que às suas entradas só surgem três combinações: $d=\mathtt{1}, z=\mathtt{1}$ ou $d=\mathtt{2}, z=\mathtt{1}$ ou $d=\mathtt{1}, z=\mathtt{0}$.

Tem-se assim



O problema de determinar a montagem correspondente a cada tabela de triverdade fica assim resolvido se, para cada tabela, se souber determinar quer $f_{2/1}$ quer $f_{0/1}$, pois a sua montagem, nos termos descritos, com a função f_{012} permite realizar uma montagem cujo desempenho é o correspondente à tabela de triverdade considerada.

Neste ponto da exposição só falta descrever como determinar as funções $f_{0/1}$ e $f_{2/1}$ para qualquer tabela de triverdade para que o sistema trivalente exposto seja funcionalmente completo. Para tal usa-se o conhecimento de que

Para obter 2 quando $x \equiv 0$, e 1 nos outros casos, deverá usar-se $\left(\overset{\veebar}{x} \dddot{\vee} x\right) \dddot{\wedge} \left(\overset{\veebar}{x} \dddot{\vee} \overset{\barwedge}{x}\right)$, cujo diagrama de montagem é: $\longrightarrow$ $0 \rhd 2$ $\longrightarrow$, referível como $0 \rhd 2$.

Para obter 2 quando $x \equiv 1$, e 1 nos outros casos, deverá usar-se $\left(\overset{\barwedge}{x} \dddot{\vee} x\right) \dddot{\wedge} \left(\overset{\barwedge}{x} \dddot{\vee} \overset{\veebar}{x}\right)$, cujo diagrama de montagem é: $\longrightarrow$ $1 \rhd 2$ $\longrightarrow$, referível como $1 \rhd 2$.

Para obter 2 quando $x \equiv 2$, e 1 nos outros casos, deverá usar-se $\left(x \dddot{\vee} \overset{\barwedge}{x}\right) \dddot{\wedge} \left(x \dddot{\vee} \overset{\veebar}{x}\right)$, cujo diagrama de montagem é: $\longrightarrow$ $2 \rhd 2$ $\longrightarrow$, referível como $2 \rhd 2$.

Para obter 0 quando $x \equiv 0$, e 1 nos outros casos, deverá usar-se $\left(x \dddot{\wedge} \overset{\barwedge}{x}\right) \dddot{\vee} \left(x \dddot{\wedge} \overset{\veebar}{x}\right)$, cujo diagrama de montagem é: $\longrightarrow$ $0 \rhd 0$ $\longrightarrow$, referível como $0 \rhd 0$.

Para obter 0 quando $x \equiv 1$, e 1 nos outros casos, deverá usar-se $\left(\overset{\veebar}{x} \dddot{\wedge} x\right) \dddot{\vee} \left(\overset{\veebar}{x} \dddot{\wedge} \overset{\barwedge}{x}\right)$, cujo diagrama de montagem é: $\longrightarrow$ $1 \rhd 0$ $\longrightarrow$, referível como $1 \rhd 0$.

Para obter 0 quando $x \equiv 2$, e 1 nos outros casos, deverá usar-se $\left(\overset{\barwedge}{x} \dddot{\wedge} x\right) \dddot{\vee} \left(\overset{\barwedge}{x} \dddot{\wedge} \overset{\veebar}{x}\right)$, cujo diagrama de montagem é: $\longrightarrow$ $2 \rhd 0$ $\longrightarrow$, referível como $1 \rhd 0$.

Estas seis montagens podem ser apelidadas de filtros.

No seguimento vai ser considerado, sem perda de generalidade, sempre uma mesma tabela de triverdade a n variáveis. Esta tabela tem o número p de entradas cuja saída é 2, tem o número q de entradas cuja saída é 1 e tem o número o de entradas cuja saída é 0, tendo-se que $p + q + o = 3^n$.

Vai ser agora descrito a forma de determinar $f_{2/1}$ para esta tabela.

Considere-se uma entrada $i \equiv I_1$ nesta tabela de triverdade com n variáveis, em que a saída correspondente, r_i tem exactamente o trivalor 2, ou seja $r_i \equiv 2$. Filtre-se cada uma das variáveis x_k, $0 \le k < n$ presentes nessa entrada da seguinte forma:

se $x_k \equiv 0$, então o filtro é $0 \triangleright 2$.

se $x_k \equiv 1$, então o filtro é $1 \triangleright 2$.

se $x_k \equiv 2$, então o filtro é $2 \triangleright 2$.

Têm-se assim n filtros, um para cada variável, cada um com o seu resultado, que só pode ser 2 ou 1. Faça-se o AND trivalente destes n resultados, cujo resultado será identificado por a_1. Este AND trivalente só poderá produzir 2 se a entrada na tabela de triverdade for exactamente a I_1, para a qual a montagem anterior foi especificamente desenhada. Qualquer outra entrada produzirá 1. Desta forma, para qualquer entrada $i \ne I_1$, virá que $a_1 \equiv 1$.

Repita-se o procedimento anterior para cada uma das p entradas cuja saída é 2. Serão assim obtidas as p saídas desde a_1 até a_p. Como resultado do OR trivalente de todas estas p saídas ter-se-á $f_{2/1}$.

Vai ser agora descrito a forma de determinar $f_{0/1}$ para esta tabela.

Considere-se uma entrada $i \equiv Y_1$ nesta tabela de triverdade com n variáveis, em que a saída correspondente, r_i tem exactamente o trivalor 0, ou seja $r_i \equiv 0$. Filtre-se cada uma das variáveis x_k, $0 \le k < n$ presentes nessa entrada da seguinte forma:

se $x_k \equiv 0$, então o filtro é $0 \triangleright 0$.

se $x_k \equiv 1$, então o filtro é $1 \triangleright 0$.

se $x_k \equiv 2$, então o filtro é $2 \triangleright 0$.

Têm-se assim n filtros, um para cada variável, cada um com o seu resultado, que só pode ser 0 ou 1. Faça-se o OR trivalente destes n resultados, cujo resultado será identificado por b_1. Este OR trivalente só poderá produzir 0 se a entrada na tabela de triverdade for exactamente a Y_1, para a qual a montagem anterior foi especificamente desenhada. Qualquer outra entrada produzirá 1. Desta forma, para qualquer entrada $i \neq Y_1$, virá que $b_1 \equiv 1$.

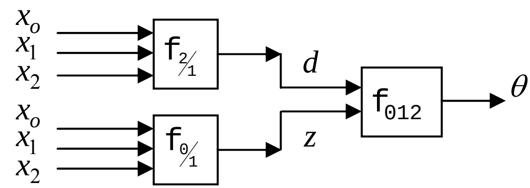
Repita-se o procedimento anterior para cada uma das o entradas cuja saída é 0. Serão assim obtidas as o saídas desde b_1 até b_o. Como resultado do AND trivalente de todas estas o saídas ter-se-á $f_{0/1}$.

[EIV.18] À tabela de triverdade

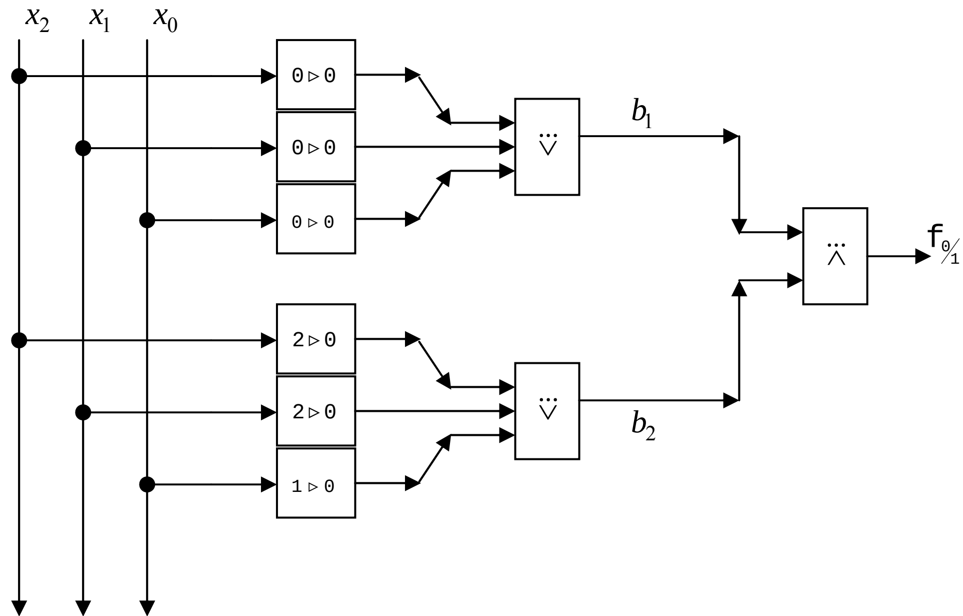
Tabela IV.7: Tabela de triverdade

x_2	x_1	x_0	θ
0	0	0	0
0	0	1	2
0	0	2	1
0	1	0	1
0	1	1	1
0	1	2	1
0	2	0	1
0	2	1	1
0	2	2	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	0	2	1
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	2	1
1	2	0	1
1	2	1	1
1	2	2	1
2	0	0	1
2	0	1	1
2	0	2	1
2	1	0	1
2	1	1	1
2	1	2	1
2	2	0	1
2	2	1	0
2	2	2	2

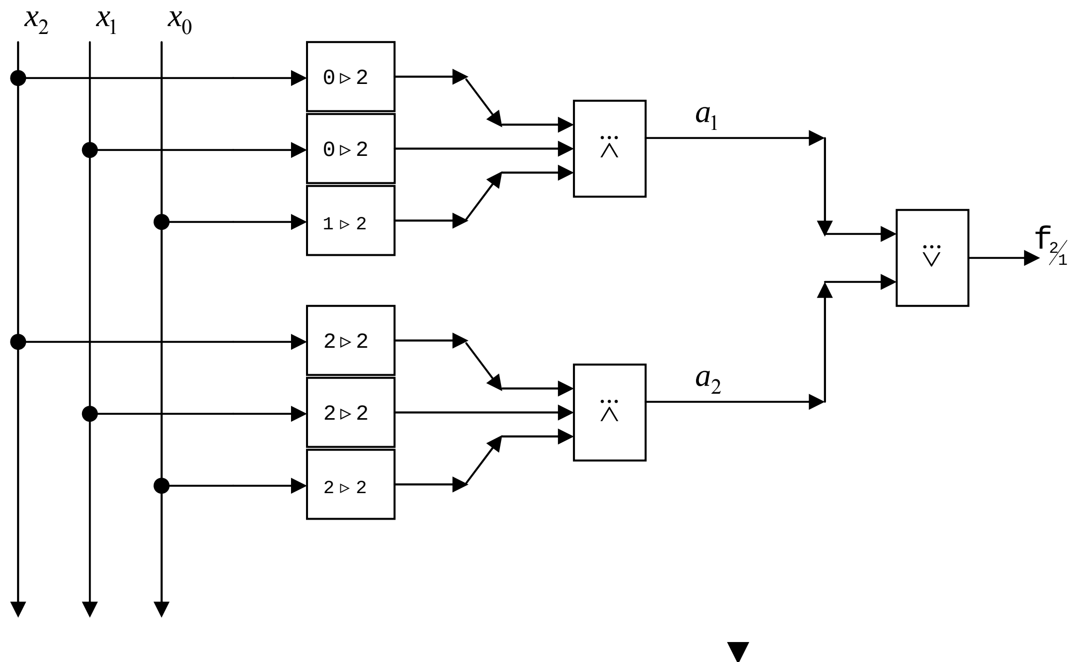
corresponde a montagem:



E onde $f_{0/1}$ terá a seguinte montagem:



E onde $f_{2/1}$ terá a seguinte montagem:



Foi assim mostrado como é formalmente possível construir a expressão, ou a montagem, correspondente a qualquer tabela de triverdade a partir de apenas três operações. Este formalismo é meramente combinatório, nada pressupondo em termos semânticos. Assim, a tríade de símbolos envolvidos poderia ser α, β e γ, ou 0, $\frac{1}{2}$ e 1, ou mesmo 0, $?$ e 1, como proposto por P. Elias para o canal binário com rasura (MacKay-2003).

No entanto os aspectos semânticos são importantes quando se consideram as aplicações. Alguns destes aspectos são abordados já de seguida.

IV.2 - Aspectos semânticos relativos à lógica trivalente.

Classicamente, a lógica bivalente tem sido interpretada como representando os valores de «verdadeiro» e de «falso», V e F. No entanto, ao ser admitido a possibilidade de trivalores é necessário distinguir bem entre:

[DIV.08] A notação $\ddot{\mathsf{V}}$ e $\ddot{\mathsf{F}}$ é usada exclusivamente para representar os valores lógicos bivalentes para «verdadeiro» e de «falso», respectivamente. ▲

[DIV.09] A notação $\dddot{\mathsf{V}}$ e $\dddot{\mathsf{F}}$ é usada exclusivamente para representar os valores lógicos trivalentes para «verdadeiro» e de «falso», respectivamente. ▲

[nDIV.03] No caso geral, e sem prejuízo de situações particulares, não ficam definidas equivalências quer entre $\ddot{\mathsf{V}}$ e $\dddot{\mathsf{V}}$ quer entre $\ddot{\mathsf{F}}$ e $\dddot{\mathsf{F}}$. ▲

[DIV.10] Para salientar que se está a considerar o valor trilógico de uma expressão $expr$, usa-se $\left(\vdots expr \vdots\right)$. ▲

No entanto é muito comum admitir-se a situação particular em que $\ddot{\mathsf{V}} \equiv \dddot{\mathsf{V}}$ e $\ddot{\mathsf{F}} \equiv \dddot{\mathsf{F}}$.

Ao lidar com uma combinatória trivalente coloca-se naturalmente a questão de como interpretar os correspondentes valores da verdade. Como se verá, ao lidar com expressões como $\hat{\varnothing} = \hat{\varnothing}$, a liberdade axiomática de definir o resultado conduz a situações distintas, sendo conveniente assinalar devidamente a igualdade como tolerante, $\hat{=}$. É assim possível axiomatizar quer que $\left(\vdots \hat{\varnothing} \hat{=} \hat{\varnothing} \vdots\right) =\vdots \dddot{\mathsf{V}}$, quer que $\left(\vdots \hat{\varnothing} = \hat{\varnothing} \vdots\right) \neq\vdots \dddot{\mathsf{V}}$. Vários autores propuseram diversas respostas. Veja-se uma das mais influentes, a proposta por Codd, (Codd-1979), na linha do trabalho iniciado por Lukasiewicz (Lukasiewicz-1964).

IV.2.1 A lógica trivalente de Codd

Para Codd, o valor lógico da ausência de informação é representada por ω, e tem-se que $\omega = \omega$ tem o valor lógico de ω, ou seja que $(\vdots \omega = \omega \vdots) =\vdots\ \omega$.

Ao desbravar o caminho conducente à actual teoria das bases de dados relacionais e subjacente à especificação da linguagem SQL, Codd propôs um sistema de lógica trivalente baseado nos seguintes três valores para a verdade: T para verdadeiro, F para falso e ω para desconhecido. (Codd-1979). Nesse artigo propõe as seguintes funções de base: AND, OR e NOT, cujas tabelas se apresentam de seguida:

Tabela IV.8: Operações de Codd

AND	T	ω	F
T	T	ω	F
ω	ω	ω	F
F	F	F	F

OR	T	ω	F
T	T	T	T
ω	T	ω	ω
F	T	ω	F

NOT	
T	F
ω	ω
F	T

Estas operações, tal como definidas por estas tabelas, correspondem exactamente às mesmas operações tal como definidas na lógica trivalente de Kleene, e estão na base dos operadores lógicos com os mesmos nomes da linguagem SQL nos seus múltiplos dialectos. Note-se no entanto que o conjunto destas três funções não se constitui como funcionalmente completo.

Para reconhecer que estas três funções não constituem um conjunto funcionalmente completo basta tentar usá-las para obter uma função binária que responda a uma dupla entrada ω com uma saída T .

IV.2.2 A lógica trivalente de Reichenbach

Em 1944, Hans Reichenbach ao estudar os fundamentos filosóficos da Mecânica Quântica propôs uma lógica trivalente cujo conjunto de funções de base é extenso e engloba quer $\ddot{\wedge}$, o AND trivalente, quer $\ddot{\vee}$, o OR trivalente, quer ainda $\not\wedge$, a negação ascendente, a que Reichenbach chama a negação cíclica (Reichenbach-1944).

Como este conjunto de funções incorpora como subconjunto todas as funções que lhe permitem ser funcionalmente completo, este conjunto de funções é funcionalmente completo. No entanto, esta faceta é pouco explorada por Reichenbach. O esforço desenvolvido por ele é mais no sentido de, na melhor tradição da lógica clássica, procurar traduzir em linguagem natural as funções de suporte da lógica trivalente.

IV.2.3 Semânticas alternativas

Na concepção de circuitos digitais é comum considerar semânticas concretas, não relacionadas com a verdade ou a falsidade em abstracto, mas relacionadas antes com o estado *de factum* de um sistema e/ou dos seus sensores.

É ainda possível considerar que os trivalores poderão corresponder às três raízes cúbicas da unidade, 1, $e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $e^{j\frac{4\pi}{3}}$ e considerar a hipótese de computadores em que os valores lógicos são representados, não por modulação binária da amplitude de uma variável física, mas por uma modulação de fase. Esta última proposta está no limite do actual conhecimento sobre a computação tal como realizada pelos neurónios biológicos, (Michel-2010) (Nakaea-2010), e representa uma evolução em relação ao paradigma do computação neuronal em termos de lógica de limiares.

IV.3 - Aplicações à presente problemática

É por vezes necessário lidar com a igualdade tolerante, $\hat{=}$, e distinguir entre ela e a igualdade habitual, $=$. Sendo a uma entidade qualquer que não $\hat{\varnothing}$, tem-se que

[DIV.11] $\left(\vdots\hat{\varnothing} = \hat{\varnothing}\vdots\right) =: \hat{\varnothing}$. ▲

[DIV.12] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \hat{=} \hat{\varnothing}\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{V}}$. ▲

[DIV.13] $\left(\vdots a \hat{=} \hat{\varnothing}\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{F}}$. ▲

[DIV.14] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \hat{=} a\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{F}}$. ▲

[DIV.15] $\left(\vdots a = \hat{\varnothing}\vdots\right) =: \hat{\varnothing}$. ▲

[DIV.16] $\left(\vdots\hat{\varnothing} = a\vdots\right) =: \hat{\varnothing}$. ▲

Também é por vezes necessário lidar com a pertença tolerante, $\hat{\in}$, e distinguir entre ela e a pertença habitual, $\in$. Sendo A um conjunto qualquer e sendo B qualquer entidade que não um conjunto, tem-se que,

[DIV.17] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \hat{\in} A\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{V}}$. ▲

[DIV.18] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \hat{\notin} A\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{F}}$. ▲

[DIV.19] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \hat{\in} B\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{F}}$. ▲

[DIV.20] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \hat{\notin} B\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{V}}$. ▲

[DIV.21] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \mathrel{\hat{\in}} \hat{\varnothing}\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{F}}$. ▲

[DIV.22] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \mathrel{\hat{\notin}} \hat{\varnothing}\vdots\right) =: \dddot{\mathsf{V}}$. ▲

[DIV.23] Se em qualquer das expressões anteriores, [DIV.17] a [DIV.22], a pertença tolerante, $\hat{\in}$, for substituída pela pertença habitual, $\in$, então o resultado é $\hat{\varnothing}$. ▲

[EIV.19] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \in \hat{\varnothing}\vdots\right) =: \hat{\varnothing}$ ▼

[EIV.20] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \in A\vdots\right) =: \hat{\varnothing}$ ▼

[EIV.21] $\left(\vdots\hat{\varnothing} \notin A\vdots\right) =: \hat{\varnothing}$ ▼

Finalmente importa referir que

[DIV.24] A expressão $\forall x \mathrel{\hat{\in}} X$ considera como válido e abrangido pelo $\forall$ o caso $\hat{\varnothing} \mathrel{\hat{\in}} X$. ▲

[nDIV.04] Não fica definido o que significa a expressão $\exists x \mathrel{\hat{\in}} X$. ▲

IV.4 - Súmula

Foi efectuada uma exposição da lógica trivalente. No seguimento, sempre que for necessário trabalhar com operações tolerantes em geral e igualdades tolerantes em particular, é necessário considerar tal actividade num contexto de lógica trivalente.

“There is nothing and there are things, and things can be regarded as elements or sets. There is nothing inside an empty set”

Apolyton

V - Dos conjuntos

Para definir e lidar com operações tolerantes, a definição de produto cartesiano é insuficiente, sendo necessário desenvolver uma alternativa mais adequada. Neste capítulo vão ser relembrados os fundamentos teóricos que permitem o desenvolvimento dessa alternativa.

Quando se lida com conjuntos, o formalismo lógico habitual é o bivalente, onde é válido quer o princípio da não contradição quer a lei do terceiro excluído.

V.1 - Elementos e Conjuntos

As noções de conjunto e seu elemento são consideradas indispensáveis e primordiais.

Quer a noção de *conjunto*, $\{a\,b\,c\cdots\}$, quer a noção de *elementos*, $a,b,c,\cdots$, de um conjunto, bem como a noção de *pertença*, $\in$, são consideradas primitivas, ou seja, são consideradas conhecidas por todos os leitores com o rigor suficiente para o correcto entendimento deste texto.

A expressão $a \in A$ afirma o facto de que a é elemento de um conjunto A.

Um conjunto pode ser elemento de outro conjunto, mas nunca de ele próprio.

As definições usuais dos conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são consideradas conhecidas, bem como a de cardinalidade de um conjunto A, representada por $|A|$ ou, alternativamente, por $\#A$.

Igualmente considerada como conhecida é a noção de conjunto vazio, neste texto construtivamente representado por $\{\}$ e que, tal como p. ex. em (Bourbaki-1970), também pode ser representado por $\varnothing$.

V.2 - Notação para os conjuntos

Os conjuntos podem ser representados exibindo, ou não, detalhes sobre os elementos que lhes pertençam.

V.2.1 – Representações nominativas e não nominativas

Uma representação nominativa não exibirá quaisquer detalhes sobre os elementos do conjunto. Nestas representações serão preferencialmente utilizadas letras maiúsculas isoladas, latinas de face itálica ou gregas, como A, X ou Ξ. Conjuntos bem conhecidos, como o dos reais, usufruem de representações nominativas específicas.

Na frase "Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros", a porção "$\mathbb{Z}$" constitui a representação nominativa e a porção "dos inteiros" constitui a representação não nominativa.

Uma representação não nominativa poderá exibir alguns, ou mesmo todos, os elementos constitutivos de um conjunto. Nestes casos é vulgar o uso de chavetas. As chavetas não são entendidas como elementos, mas como organizadores aglutinantes.

[EV.01] Por exemplo, a expressão $\{a\}$ representa um conjunto cujo único elemento é a. Por sua vez, a expressão $\{\{a\}\}$ representa um conjunto cujo único elemento é $\{a\}$ ▼.

V.2.1.2 – Sobre o uso de chavetas

Nunca se usam chavetas numa representação nominativa. Isto porque, embora não esteja formalmente vedado, o uso de chavetas nas representações nominativas é considerado aberrante, pelo que não é praticado. Por outro lado, todas as representações não nominativas que utilizam chavetas fazem-no de forma equilibrada, pois a cada chaveta que abre tem que posteriormente corresponder sempre uma, e apenas uma, chaveta que fecha. Cumulativamente ao respeito pelo equilíbrio, as representações são estruturadas de modo a que, na escrita sequencial, da esquerda para a direita, da expressão simbólica que constitui a representação do conjunto, qualquer chaveta que abre, "$\{$", fica sempre localizada mais à esquerda do que a correspondente chaveta que fecha, "$\}$". Como se verá, é utilizado o nome "sistema de parêntesis" para, no caso unidimensional, indicar esta tecedura da escrita.

V.2.2 – Exibição dos elementos de um conjunto

Como se viu uma representação não nominativa pode exibir alguns, ou mesmo todos, os elementos constitutivos de um conjunto. Quando a representação de um conjunto exibir elementos, a sua sequência de apresentação é formalmente indiferente. Na prática e desde que permita a sua discriminação, a disposição dos elementos é irrelevante e indiferente para a descrição do conjunto. Este facto é bem conhecido.

São usadas chavetas rodeando os elementos, como em $\{a\ b\ c\}$, para descrever o facto de que um conjunto é formado por certos elementos, neste caso os elementos a, b e c. O número de repetições com que cada elemento surge na representação de um conjunto é considerado irrelevante. Por isso as expressões $\{abc\}$, $\{aabc\}$ ou, até mesmo, $\{abaca\}$ representam o mesmo conjunto. Refira-se, no entanto, que é possível recorrer ao conceito de multiconjunto, (Blizard-89), para considerar distintos estes casos. Num multiconjunto cada elemento goza de uma multiplicidade.

V.2.3 – Notação para o elemento genérico

O elemento genérico de um conjunto será preferencialmente representado por uma letra minúscula, como a, x ou ξ, correspondente, quando apropriado, à maiúscula da representação nominativa.

Quando é conveniente discriminar vários elementos genéricos de um conjunto, pode ser utilizada a subetiquetagem identificadora dos seus elementos com letras gregas minúsculas, como a_λ, a_μ. Esta opção pelas letras gregas minúsculas é propositada. Por um lado, é feita para atenuar o mais possível a possibilidade de intuição de uma ordem, pois é comum, embora não obrigatório, as subetiquetas latinas, como n, i, k serem utilizadas para representar índices estipuladores de ordenações. Por outro lado, serve também para salientar que as subetiquetas representam-se apenas a si próprias e não devem ser vistas como variáveis. A este propósito relembre-se que, no caso de uma sequência U_n, a subetiqueta n é vista como uma variável local, ou muda, que assume valores em $\mathbb{N}$.

Quando A for um conjunto, com elemento genérico a, tal facto poderá ser representado por $A = \{\cdots\ a\ \cdots\}$.

V.2.4 – Representação em extensão

Na representação em extensão de um conjunto são patentes todos os seus elementos.

[DV.01] Quando na representação de um conjunto, como $\{a\,b\,c\}$, são exibidos todos os elementos, tal representação é dita **extensiva** ou em extensão. ▲

Este tipo de descrição de um conjunto só pode ser usado se o cardinal do conjunto for finito.

Nas representações extensivas, o primeiro símbolo é sempre uma chaveta que abre e o último é sempre uma chaveta que fecha. A título de exemplo, considere-se o conjunto representado em extensão pela expressão $\left\{\begin{matrix}\{a\}\\\{a\,b\}\end{matrix}\right\}$, conjunto esse que também admite $\{\{a\}\{a\,b\}\}$ como representação extensiva.

Numa representação extensiva, o uso de um separador gráfico, como a vírgula, entre os elementos do conjunto, é considerado apenas um facilitador da leitura, de cariz opcional, sem outro significado formal, pelo que se tem: $\{a\,b\,c\}=\{a,b,c\}$. No entanto existem autores, como Hehner, (Hehner-2004), que não só exigem o uso da vírgula como descrevem formalmente as suas propriedades.

Serão usadas chavetas dentro de chavetas, quando os elementos de um conjunto forem eles próprios conjuntos representados em extensão, como em $\{\{a\}\}$ ou em $\{\{a\}\{a\,b\}\}$.

V.2.5 – Representação em compreensão

Um conjunto pode ser representado indicando a propriedade exclusiva aos seus elementos (Bourbaki-1970) (Jech-2006).

[DV.02] Esta representação é dita compreensiva, ou em **compreensão**. ▲

Esta representação é especialmente indicada quando o conjunto é de cardinal não finito

Nesta representação é usada uma expressão de estrutura genérica $\{x \mid propriedade\}$, que refere qual é o elemento genérico e qual é a propriedade exclusiva.

[EV.02] Como exemplo possível podemos considerar:

$A=\{a \mid a \text{ é solução da equação } x+1=3\}$. ▼

A propriedade exclusiva de um conjunto é, por vezes, referida como sendo a regra característica a que apenas os seus elementos, e nada mais para além destes, estão vinculados.

[EV.03] Como exemplo de um conjunto cujo cardinal é não finito, e que portanto não admite representação em extensão, podemos considerar o conjunto de todos os naturais, $\mathbb{N} = \{1\,2\,3\,4\cdots\}$. Note-se, no entanto, que o conjunto $V = \{\mathbb{N}\} = \{\{1\,2\,3\,4\cdots\}\}$ já tem cardinal finito e igual a um. ▼

V.2.6 – Sobre a notação para a pertença

Como se viu, quando a for elemento de um conjunto A, tal facto será escrito $a \in A$.

[DV.03] Esta expressão admite as leituras "a é elemento de A", "a **pertence** a A" ou ainda "a é possuído por A", leituras estas postuladas como equivalentes. ▲

Para representar esse facto também é possível escrever $A \ni a$, [Aubyn-04], que se lê "A possui a". Quando vários elementos, como por exemplo a, b, c pertencem a um conjunto A, tal poderá ser escrito simplificadamente como $a,b,c \in A$, em lugar de $(a \in A) \wedge (b \in A) \wedge (c \in A)$.

A expressão $a \notin A$ representa o caso em que a não pertence ao conjunto A, ou seja $\overline{(a \in A)} \Leftrightarrow a \notin A$. Esta expressão $a \notin A$, pode ser lida dos seguintes três modos equivalentes: "*a* não é elemento de *A*" ou "*a* não pertence a *A*" ou ainda "*a* não é possuído por *A*". Equivalentemente, é possível escrever $A \not\ni a$, [Aubyn - 04], que é lido "*A* não possui *a*". Quando vários elementos, como por exemplo a, b, c não pertencem a um conjunto A, tal poderá ser escrito simplificadamente como $a,b,c \notin A$, em lugar de $(a \notin A) \wedge (b \notin A) \wedge (c \notin A)$.

Quando se tem que $a \in A$ e que $A \in \Xi$, tal não permite concluir que $a \in \Xi$. A propriedade de pertencer a um conjunto não é transitiva.

Note-se que uma expressão como $a \in A$ tem também uma valoração bilógica $(: a \in A :)$, pois constitui uma afirmação. Se nada for explicitamente declarado quanto ao valor bilógico de uma tal expressão, convenciona-se que este é $\ddot{\mathrm{V}}$, que a expressão não "mente", ou seja, que $(: a \in A :) =: \ddot{\mathrm{V}}$.

V.3 – Definição de conjuntos

Quer a representação em extensão, quer a representação em compreensão definem o conjunto que representam.

Considere-se agora uma expressão como $A=\{a\,b\,c\}$, onde o mesmo conjunto é representado de duas maneiras, distintas mas equivalentes: a nominativa, situada de um dos lados da igualdade, e a extensiva, situada no outro.

[DV.04] Quando uma representação **nominativa** é afirmada como equivalente a outra representação, seja extensiva ou compreensiva, diz-se que essa afirmação define a representação nominativa do conjunto. ▲

V.3.1 – Igualdade e diferença de conjuntos

Como inicialmente referido, ao lidar com conjuntos, o formalismo lógico habitual é o bivalente, onde é válido, quer o princípio da não contradição, quer a lei do terceiro excluído.

Dados dois conjuntos quaisquer, ou são considerados iguais, ou são considerados diferentes, não existindo uma terceira alternativa. Além disso, se dois conjuntos quaisquer são considerados como iguais já não podem ser considerados diferentes e, reciprocamente, sendo considerados diferentes já não podem ser considerados como iguais.

[DV.05] Um conjunto é sempre igual a si próprio. ▲

[DV.06] Dois conjuntos são considerados diferentes sse existir um elemento que não pertença a um deles mas pertença ao outro. ▲

[DV.07] Dois conjuntos são considerados iguais sse não forem diferentes. ▲

Posto isto, é possível concluir que todos os conjuntos vazios são iguais.

[DV.08] Dois conjuntos são considerados como o mesmo conjunto sse forem iguais, (Bourbaki-1970) (Jech-2006) (Rubin-1967). ▲

De certa forma um conjunto é ubíquo, podendo surgir em diversos lugares e momentos, sem perder a singularidade, sem implicar uma pluralidade de idênticos. É utilizado o termo "evocação", para referir estas cópias, distintas, mas unas, que não obrigam a uma pluralidade. A título de exemplo, significa isto que, nos termos da exposição efectuada, existe apenas um conjunto $\mathbb{N}$, imutavelmente indiferente à multiplicidade de ocasiões onde é evocado. A afirmação anterior "Um conjunto é sempre igual a si próprio" transmuta-se pois para "Qualquer conjunto é unicamente igual a si próprio".

Esta situação é subtilmente diferente daquela que é tradicional na geometria, onde o mesmo segmento de recta não pode estar em duas localizações. Segmentos de recta, ou outras

figuras, em tudo iguais excepto na localização são apelidados de congruentes e não de iguais (Silva-1964).

Posto isto, é possível concluir que só há um conjunto vazio.

Por estas razões, são preferíveis locuções contendo: " … o conjunto vazio …", em lugar de "… um conjunto vazio …".

O mesmo conjunto pode ter distintas representações, como é o caso de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}^{+}$, ou de $\{1\ 3\}$ e $\{x \mid x \text{ é solução do polinómio real} : (x-1)(x-3)=0\}$.

V.3.2 – Aspectos formais da diferença e igualdade de conjuntos.

No âmbito da lógica bivalente, é possível formalizar do seguinte modo a definição de diferença de conjuntos:

[DV.09] $(A \neq X) \Leftrightarrow (\exists z(((z \notin A) \wedge (z \in X)) \vee ((z \in A) \wedge (z \notin X))))$ ▲

Na definição apresentada na expressão anterior, a disjunção é a inclusiva, $\vee$. Esta disjunção interliga a afirmação $((z \notin A) \wedge (z \in X))$ com a afirmação $((z \in A) \wedge (z \notin X))$. Visto a disjunção ser a inclusiva, quando ambas as afirmações forem verdadeiras, quando forem concordantes, tal não compromete a veracidade da disjunção. Isso acarreta que dois conjuntos são diferentes quando exista um z tal que verifique qualquer um dos seguintes três casos:

a) z pertença a A, mas não a X

ou então que

b) z pertença a X, mas não a A

ou ainda que, visto a disjunção ser inclusiva, que

c) z pertença a X, mas não a A e também que z pertença a A, mas não a X

Tem, por isso, de considerar-se o caso c), pois faz parte da definição, apesar de desde já o bom senso nos prevenir que é inexequível que z pertença a X mas não a A, enquanto que também pertença a A mas não a X. Esta definição coloca pois a questão: «Como conciliar tal inexequibilidade intuitiva com o facto de que numa disjunção inclusiva ambos os termos poderem ser concordantes?»

Acontece que, neste caso, pelo modo como os argumentos da disjunção inclusiva são construídos, tal concordância é justamente impossível. Desta forma tal inexequibilidade não é só intuitiva mas também é formalmente demonstrável.

Para expor com o detalhe apropriado as manipulações simbólicas conducentes à elucidação formal da dita impossibilidade, vai ser necessário lidar com tabelas de verdade. Estas são de manipulação muito mais fácil se a notação for mais condensada. Por isso, as proposições $z \in A$ e $z \in X$ irão ser representadas, respectivamente, pelas variáveis booleanas bivalentes α e χ. Tem-se assim:

$$\alpha \Leftrightarrow z \in A$$

$$\overline{\alpha} \Leftrightarrow z \notin A$$

$$\chi \Leftrightarrow z \in X$$

$$\overline{\chi} \Leftrightarrow z \notin X$$

É assim possível reescrever em termos booleanos a expressão proposicional $((z \notin A) \wedge (z \in X)) \vee ((z \in A) \wedge (z \notin X))$.

Sendo, como habitualmente, a conjunção representada pelo produto e a disjunção inclusiva representada pela soma, obtém-se a expressão booleana $\overline{\alpha}\chi + \alpha\overline{\chi}$.

Calcule-se a tabela de verdade desta expressão e de $(\overline{\alpha}\chi)(\alpha\overline{\chi})$, usando o zero booleano, `0`, para `F`, falso, e o um booleano, `1`, para `V`, verdade. Vem:

Tabela V.1: Tabela de verdade

α	χ	$\overline{\alpha}\chi$	$\alpha\overline{\chi}$	$\overline{\alpha}\chi + \alpha\overline{\chi}$	$(\overline{\alpha}\chi)(\alpha\overline{\chi})$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0

Reconhece-se desta forma a que a expressão $(\overline{\alpha}\chi)(\alpha\overline{\chi})$ nunca pode ser verdade, é sempre falsa, isto para quaisquer que sejam os valores das variáveis α e χ. Retomando a formulação proposicional, constata-se que esta expressão corresponde a $(((z \notin A) \wedge (z \in X)) \wedge ((z \in A) \wedge (z \notin X)))$.

Ou seja, na definição

$$(A \neq X) \Leftrightarrow \left(\exists z \left(\left((z \notin A) \wedge (z \in X) \right) \vee \left((z \in A) \wedge (z \notin X) \right) \right) \right)$$

está subtilmente introduzida a condição que nunca se pode ter

$$\left(\left((z \notin A) \wedge (z \in X) \right) \wedge \left((z \in A) \wedge (z \notin X) \right) \right).$$

Quer isto dizer que a situação de um elemento pertencer a A e não pertencer a X, enquanto não pertencendo a A e pertencendo a X, está impossibilitada por esta formulação, pese embora o facto de que a definição estar enunciada com a disjunção inclusiva, $\vee$.

Posto isto, é possível reforçar a conclusão de que todos os conjuntos vazios não podem ser considerados diferentes, pois não é possível encontrar elemento algum que não pertença a um deles e pertença ao outro. De facto, é até impossível encontrar qualquer elemento que pertença ao conjunto vazio, pela própria definição de conjunto vazio. Consequentemente, não se consideram diferentes conjuntos vazios. Considera-se, isso sim, que todos os conjuntos vazios são iguais e portanto o mesmo conjunto. Por isso, só se admite a existência de um único conjunto vazio (Heijenoort-1967). Afirmações do género "… um conjunto vazio …" serão consideradas menos adequadas que as tipificadas por "… o conjunto vazio…".

Vejamos agora o que se passa com a igualdade de conjuntos.

Negando ambos os termos da equivalência atrás exposta, ficaremos com a formalização da igualdade de conjuntos, pois $\overline{(A \neq X)} \Leftrightarrow (A = X)$ quando o formalismo lógico é o bivalente.

Virá então que:

$$(A = X) \Leftrightarrow \overline{\left(\exists z \left(\left((z \notin A) \wedge (z \in X) \right) \vee \left((z \in A) \wedge (z \notin X) \right) \right) \right)}.$$

Ora, a negação do quantificador existencial consiste em $\overline{\exists x (\bullet)} \Leftrightarrow \forall x \overline{(\bullet)}$, pelo que se tem:

$$(A = X) \Leftrightarrow \left(\forall z \, \overline{\left(\left((z \notin A) \wedge (z \in X) \right) \vee \left((z \in A) \wedge (z \notin X) \right) \right)} \right). \qquad (*)$$

Como visto, as proposições $z \in A$ e $z \in X$ podem ser representadas pelas variáveis booleanas bivalentes α e χ, respectivamente. Ao $\wedge$ corresponde o produto booleano e ao $\vee$ a soma booleana. Tal permite obter a seguinte representação em mintermos, ou soma de produtos, para a equivalência anterior:

$$(A = X) \Leftrightarrow \left(\forall z \, \overline{\left((\overline{\alpha} \chi) + (\alpha \overline{\chi}) \right)} \right),$$

a que está associada a seguinte tabela de verdade:

Tabela V.2: Tabela de verdade

α	χ	$(\overline{\alpha}\chi)+(\alpha\overline{\chi})$	$\overline{((\overline{\alpha}\chi)+(\alpha\overline{\chi}))}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Desta forma, é ainda possível analisar, quer a implicação $\alpha \Rightarrow \chi$, quer a implicação $\chi \Rightarrow \alpha$, bem como calcular o valor de $(\alpha \Rightarrow \chi)\wedge(\chi \Rightarrow \alpha)$.

Tem-se

Tabela V.3: Tabela de verdade

α	χ	$\alpha \Rightarrow \chi$	$\chi \Rightarrow \alpha$	$(\alpha \Rightarrow \chi)\wedge(\chi \Rightarrow \alpha)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Pelo que se conclui que, quer $\overline{((\overline{\alpha}\chi)+(\alpha\overline{\chi}))}$, quer $(\alpha \Rightarrow \chi)\wedge(\chi \Rightarrow \alpha)$ representam a mesma função booleana. Sendo assim, a equivalência (*), em apreciação, pode ser escrita na forma

$$(A = X) \Leftrightarrow (\forall z\, ((\alpha \Rightarrow \chi)\wedge(\chi \Rightarrow \alpha)))$$

Relembrando e usando as equivalências $\alpha \Leftrightarrow (z \in A)$ e $\chi \Leftrightarrow (z \in X)$, a expressão anterior assume a forma:

$$(A = X) \Leftrightarrow (\forall z\, (((z \in A) \Rightarrow (z \in X)) \wedge ((z \in X) \Rightarrow (z \in A))))$$

Esta é a expressão com que classicamente é definida a igualdade de conjuntos (Jech-2006; Oliveira-1982) . Significa que dois conjuntos são iguais sse qualquer elemento que pertença a um deles é forçosamente também elemento do outro. Tal pode resumir-se como:

[DV.10] Dois conjuntos são iguais sse forem formados pelos mesmos elementos. ▲

Neste texto, preferiu desenvolver-se a formulação da igualdade a partir da diferença dos conjuntos, pois, não só permite reforçar com muita naturalidade a conclusão de que todos os conjuntos vazios são iguais, como abre as portas à possibilidade de que, pelo menos, uma das definições de igualdade ou diferença de conjuntos possa ser revista, quando a lógica aplicável não for a bivalente, como é o caso quando as operações envolvidas são tolerantes.

V.3.3 – Distinção entre o conjunto singular e o seu elemento

É conveniente realçar a distinção entre um conjunto formado por um único elemento, $\{a\}$, e o próprio elemento a, para todo e qualquer a.

[DV.11] Um conjunto formado por um único elemento é conhecido como *conjunto unitário* ou *conjunto singular* ou ainda *singletão*, do inglês "*singleton*". ▲

[DV.12] Um conjunto que seja nem vazio, nem singular, será chamado de *conjunto plural*. ▲

A distinção entre um singletão e o seu elemento é muito importante, especialmente aquando da definição das operações e suas propriedades, como quase todos os autores defendem (Oliveira-1982; Rubin-1967; Jech-2006). No entanto, estranhamente, alguns autores, como por exemplo (Ljapin-2009), não distinguem $\{a\}$ do próprio a, afirmando: we shall not make any distinction between the singleton $\{a\}$ and its single element a.

Esta fusão entre um singletão e o seu elemento provoca dificuldades teóricas.

Por exemplo, quando não efectuada, conduz a que se tenha de admitir que: $a=\{a\}=\{\{a\}\}=\{\{\cdots\{a\}\cdots\}\}$.

Além disso, seria impossível toda a construção dos ordinais finitos de Von Neumann, $0=\{\}$, $1=\{0\}=\{\{\}\}$, $2=\{01\}=\{\{\}\{\{\}\}\}$, $3=\{012\}=\{\{\}\{\{\}\}\{\{\}\{\{\}\}\}\}$, ….

Muitos mais exemplos são possíveis.

Em conclusão, a não discriminação entre o singletão e o seu elemento afecta muito negativamente o correcto desenvolvimento da teoria, sobretudo a partir do nível das operações e produtos cartesianos, facto para o qual é aqui chamada a atenção.

Uma consequência importantíssima desta distinção é a não transitividade da pertença. Considere-se A, um conjunto não vazio, e um seu elemento genérico a. Como visto, é correcto afirmar que a pertence a A ou então que A possui a. Considere-se adicionalmente

que A é um singletão. É correcto afirmar que $a \in \{a\}$. Um outro singletão de interesse, distinto de A, é $\{\{a\}\}$, aquele cujo único elemento é o próprio $\{a\}$. Devido a este facto tem-se que $\{a\} \in \{\{a\}\}$ e que $a \notin \{\{a\}\}$, visto o único elemento de $\{\{a\}\}$ ser $\{a\}$, que é distinto de a. Definindo $\Xi = \{\{a\}\} = \{A\}$, tem-se que $(a \in A) \wedge (A \in \Xi) \not\Rightarrow (a \in \Xi)$. Esta não transitividade da pertença é geral. Só em casos muito particulares, em exemplos escolhidos a dedo, é que se consegue que a pertença pareça transitiva.

É no entanto possível, como se verá, afectar o símbolo $\in$ com um expoente. Essa afectação, juntamente com um protocolo expressivo de índole numérico-algébrica, permitirá articular detalhada e convenientemente toda a informação estrutural de pertença existente num conjunto.

V.4 – Conter

Vai agora ser apreciada a situação em que um conjunto não pertence a outro mas está contido nele.

[DV.13] Diz-se que o conjunto A está contido, em sentido lato, ou simplesmente que está **contido**, noutro conjunto X, $A \subseteq X$, quando:
ou A for o conjunto vazio, ou todo e qualquer elemento de A for necessariamente elemento de X. Ou seja, quando:
$(A \subseteq X) \Leftrightarrow ((A = \varnothing) \vee ((a \in A) \Rightarrow (a \in X)))$. ▲

[DV.14] Um conjunto A que esteja contido noutro conjunto X também pode ser referido como sendo um subconjunto em sentido lato, ou simplesmente um **subconjunto**, de X. ▲

[EV.04] O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. ▼

[EV.05] Qualquer conjunto é subconjunto de si próprio. ▼

É por vezes conveniente restringir um pouco esta definição em sentido lato.

[DV.15] Diz-se que o conjunto A está contido em sentido estrito noutro conjunto X, $A \subset X$, ou que A é um subconjunto de X em sentido estrito, quando está contido em sentido lato, e é diferente de X. Ou seja, quando:
$(A \subset X) \Leftrightarrow ((A \subseteq X) \wedge (A \neq X))$. ▲

Da definição anterior deduz-se que qualquer conjunto que esteja contido noutro em sentido estrito, também o está em sentido lato.

[TV.01] $(A \subset X) \Rightarrow (A \subseteq X)$. ■

Quer em sentido lato, quer em sentido estrito, esta propriedade de conter é de índole transitiva, no sentido em que, se o conjunto A estiver contido num conjunto X e se por sua vez o conjunto X estiver contido no conjunto Y, então é possível concluir que o conjunto A está contido no conjunto Y. Ou seja, é possível demonstrar que:

[TV.02] $((A \subset X) \wedge (X \subset Y)) \Rightarrow (A \subset Y)$. ■

[TV.03] $((A \subseteq X) \wedge (X \subset Y)) \Rightarrow (A \subset Y)$. ■

[TV.04] $((A \subset X) \wedge (X \subseteq Y)) \Rightarrow (A \subset Y)$. ■

Note-se que

[TV.05] $((A \subseteq X) \wedge (X \subseteq Y)) \Rightarrow (A \subseteq Y)$. ■

[SV.01] Relativamente a esta problemática, neste texto é evitado o termo "incluído", pois uma rápida e informal revisão de literatura permitiu concluir que é um termo de significado vago e ambíguo entre o pertencer e o conter. Isto porque este termo surge por vezes enquanto sinónimo de $\in$, como em «O elemento a está incluído em A, pois $a \in A$». E também surge, por vezes, como sinónimo de $\subseteq$, ou de $\subset$, em afirmações como "O conjunto A está incluído no conjunto B, pois $A \subseteq B$". Numa afirmação X está incluído em Y surge pois uma dúvida. Pretende-se afirmar que $X \in Y$ ou afirmar que $X \subseteq Y$ ou, até mesmo, que $X \subset Y$? Assim, por se considerar que pode assumir vários significados nem sempre adequadamente distinguíveis pelo contexto, o uso deste vocábulo será evitado neste texto. ♦

V.4.1 – O conter e o pertencer

O conter e o pertencer interagem por intermédio do conceito de conjunto potência.

[DV.16] O **conjunto das partes** de um conjunto, 2^X, também conhecido como **conjunto potência**, é o conjunto de todos os conjuntos possíveis de realizar utilizando apenas elementos de X. ▲

Nesta ordem de ideias, diz-se que o conjunto A está contido em sentido lato noutro conjunto X, $A \subseteq X$, ou que A é um subconjunto de X em sentido lato, quando A é elemento do conjunto das partes de X. Ou seja:

[TV.06] $(A \subseteq X) \Leftrightarrow (A \in 2^X)$. ■

[EV.06] Para ilustrar uma aplicação destas distinções, considerem-se dois conjuntos: o conjunto vazio, $\{\}$, e o conjunto singular cujo único elemento é o conjunto vazio, $\{\{\}\}$. No primeiro caso é possível afirmar que o conjunto vazio, sendo um subconjunto de todo e qualquer conjunto, é um subconjunto dele próprio. De facto só é possível definir um conjunto cujo único subconjunto é o $\{\}$. Esse peculiar conjunto é o próprio $\{\}$ (Oliveira-1982). Representa-se tal afirmação por $\{\} \subseteq \{\}$. No entanto, o conjunto vazio não tem elementos, pelo que não se pode dizer que qualquer coisa pertence ao conjunto vazio, nem mesmo ele próprio. Representa-se tal facto por $\{\} \notin \{\}$, coerente com a afirmação de que nenhum conjunto pode pertencer a si próprio.
Analise-se agora o segundo caso, $\{\{\}\}$. Aqui o conjunto vazio é ele próprio um elemento de outro conjunto, pelo que neste caso $\{\} \in \{\{\}\}$. Mas como o conjunto vazio é um subconjunto de todo e qualquer conjunto, tem-se também que $\{\} \subseteq \{\{\}\}$. Note-se que um conjunto, pode pertencer e ser subconjunto de outro, é sempre subconjunto de si mesmo, mas como já foi referido, nenhum conjunto pode pertencer a si mesmo. Na obra (Oliveira-1982) podem encontrar-se mais informações sobre estes aspectos. ▼

Retome-se agora o conjunto $A = \{\{a\}\}$.

[EV.07] Como visto, é correcto afirmar $a \in \{a\}$, tal como também é correcto afirmar $\{a\} \in A$. Afirmar $a \in A$ não está correcto, pois o único elemento do conjunto A é o singletão $\{a\}$, diferente de a. Deste modo verifica-se novamente que, em geral, a propriedade de pertencer, $\in$, não é transitiva. ▼

V.5 - Súmula

Foram revistas as definições e conceitos principais sobre conjuntos. Seguidamente será abordada a definição de urconjunto. Esta definição é instrumental para a definição de operações tolerantes.

VI – Urconjuntos

Neste capítulo são estabelecidos os fundamentos teóricos que permitem o desenvolvimento de uma alternativa tolerante ao par ordenado e posteriormente ao produto cartesiano. Só após se ter definido o que é um produto cartesiano tolerante é que é possível abordar a teoria das operações tolerantes a a sua aplicação ao processamento de sinal.

Como referido, a lógica em vigor é a bivalente.

VI.1 - Urelementos e urdomínios

Considere-se um conjunto qualquer. Tal conjunto, ou é vazio, ou é não vazio, não existindo uma terceira possibilidade. Considere-se então um conjunto não vazio. Todo e cada um dos seus elementos, ou é considerado um conjunto, ou não é considerado um conjunto, não existindo uma terceira possibilidade. Nestas condições, é estipulado:

[DVI.01] Um elemento que não seja considerado um conjunto será chamado de **urelemento** (Shoenfield-1967; Machover-1996). ▲

O prefixo "ur" provém do alemão ur-, primordial. Desta forma um urelemento é algo que não é considerado um conjunto, mas que pode ser elemento de um conjunto. Outros autores chamam-lhes átomos (Moschovakis-2006). Neste texto prefere-se a expressão de origem alemã, quer pela plasticidade expressiva que permite, quer pela consistência semântica que proporciona.

Considerar determinado objecto como urelemento é, do ponto de vista metodológico, uma decisão pragmática, firme e adequadamente permanente. Essa decisão corporiza uma abstracção que impede cada urelemento de ser encarado como um conjunto. Esta abstracção é também redutora, pois evita o ter de considerar detalhes de cariz irrelevante para o fim em vista.

[EVI.01] Como exemplo do justamente exposto, considere-se o 'f', o efe, a sexta letra do nosso alfabeto. Quando se está a considerar o alfabeto como um conjunto, as letras desse alfabeto são consideradas urelementos, símbolos irredutíveis. Nesta situação, os glifos do efe podem ser grafados de várias formas, tais como 'F', 'f', ou '*f*', que não deixam de ser o mesmo urelemento do alfabeto. Esta forma de encarar os símbolos pertencentes ao alfabeto é a habitual, quando se

pretendem estudar linguagens formais. Continuando com este mesmo exemplo, considere-se agora que se estão a examinar quais os vários modelos de molde tipográficos, ou tipos, aos quais pertencem os glifos que podem representar o dito ‘f’. Podem considerar-se glifos de distintos tipos, tais como ‘F’, o ‘f’, o ‘$\mathscr{f}$’, e muitos outros. Sob esta perspectiva, quando vistos como urelementos do alfabeto, todos estes glifos são o mesmo urelemento ‘f’, enquanto que, quando vistos ao nível grafológico, são urelementos distintos do conjunto dos glifos do efe. Estas duas visões são consideradas mutuamente exclusivas. Ao lidar-se com uma, é preferível inibir a outra. ▼

[EVI.02] Como exemplo do acabado de expor, considere-se um número complexo $z \in \mathbb{C}$. Quando se estão a considerar operações em $\mathbb{C}$, os elementos desse conjunto são consideradas urelementos irredutíveis. Nesta situação, um determinado número complexo pode ser representado de várias formas, tais como a forma polar ou a cartesiana, não deixando de ser o mesmo número complexo, o mesmo urelemento de $\mathbb{C}$. Esta forma de encarar os elementos pertencentes a $\mathbb{C}$ é a habitual, quando se pretendem estudar operações e funções de variável complexa. Continuando ainda com este exemplo, considere-se agora que se estão a examinar as várias formas de representação para o dito número complexo z, como a polar ou a cartesiana. Sob esta perspectiva, quando vistos como urelementos de $\mathbb{C}$, todos essas formas são o mesmo urelemento z, enquanto que, quando vistos ao nível da forma de representação, são elementos distintos do conjunto das representações possíveis para o z. Tal como no exemplo anterior, estas duas visões são consideradas mutuamente exclusivas e ao lidar-se com uma, é preferível inibir a outra. ▼

Considera-se pois o urelemento, não como um absoluto em si mesmo, mas antes como uma abstracção redutora, tanto suficiente para o pretendido desenvolvimento da teoria, como necessária para estancar a inclusão de detalhes irrelevantes. Relembre-se a este propósito que Euclides, livro I, proposição I, definiu ponto como sendo aquilo que não tem partes ou magnitude. Em muitas áreas da matemática, os pontos euclidianos são considerados urelementos.

No sentido expresso em « I.1.2.5 – O conter e o pertencer », um urelemento pode pertencer, pode ser possuído, mas não pode possuir. Tal como os elementos genéricos, os urelementos são também representados, preferencialmente, por letras minúsculas.

[DVI.02] Um conjunto singular e cujo único elemento seja um urelemento, pode também ser chamado de conjunto **ursingular**. ▲

Nem todos os conjuntos singulares são ursingulares.

[EVI.03] Por exemplo, tanto o conjunto $\{\{a\}\}$, como o conjunto $V = \{\mathbb{N}\}$, são singulares mas não ursingulares. ▼

É possível considerar conjuntos em que todos os seus elementos sejam urelementos.

[DVI.03] Um conjunto é dito **urdomínio** se for vazio, ou se todos os seus elementos forem considerados urelementos. ▲

Como se verá, os urdomínios finitos são chamados de conjuntos ursimples.

Sendo um conjunto, um urdomínio pode ser representado nominativamente por uma letra maiúscula isolada, tal como descrito em V.2.1. Acontece que por vezes é necessário salientar o facto de que um dado conjunto é um urdomínio. Nestes casos ao representar nominativamente o conjunto, tem lugar a preferência por letras maiúsculas de tipo latino em fonte CASTELAR, em que o batente da letra, o "*outline*", se distingue do seu preenchimento (Neves-2004).

Para ilustrar o exposto, considerem-se os seguintes exemplos.

[EVI.04] Qualquer conjunto ursingular é um urdomínio. ▼

[EVI.05] O conjunto $\{a\ b\ c\}$ é um urdomínio, pois todos os seus elementos podem ser considerados urelementos. ▼

[EVI.06] Tanto o conjunto $\{\{a\}\}$, como o conjunto $V = \{\mathbb{N}\}$, não são urdomínios, pois os seus elementos são considerados conjuntos. ▼

[EVI.07] Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ são urdomínios, pois os seus elementos são números, considerados urelementos e não conjuntos. Também os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ serão urdomínios quando os seus elementos, que são números, forem considerados urelementos, mesmo que representados por expressões como $\frac{1}{2}$ ou $\sigma + j\omega$. ▼

VI.1.2 – Urexpressões

Vai agora definir-se um tipo específico de fiadas finitas, as urexpressões. Isto porque as urexpressões são intrumentais para a definição de urconjuntos e é nos urconjuntos que se apoia a definição de produto cartesiano tolerante.

[DVI.04] Chama-se **expressão finita** a toda e qualquer expressão elaborada com um número finito de símbolos. ▲

Notar que não é exigido que a expressão seja representada unidimensionalmente. Uma expressão não tem de ser uma fiada.

[EVI.08] Como exemplos de expressões não unidimensionais, temos:

a) O número $\frac{1}{2}$, que também admite representação pela expressão unidimensional 0.5.

b) O conjunto representado pela expressão $\begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{a\,b\} \end{Bmatrix}$, que também admite $\{\{a\}\{a\,b\}\}$ como representação, tal como já referido em V.2.4. ▼

[EVI.09] Outro exemplo de expressões não unidimensionais, muito comum, é a habitual representação matricial por linhas e colunas. ▼

Convém clarificar que uma expressão não é necessariamente uma fiada, uma *string*, mas que:

[TVI.01] Uma fiada é sempre uma expressão. ■

[TVI.02] Nem todas as expressões são fiadas. ■

[TVI.03] Uma fiada finita é sempre uma expressão finita. ■

[TVI.04] Nem todas as expressões finitas são fiadas. ■

Posto isto, defina-se o que é uma urexpressão.

[DVI.05] Chama-se **urexpressão** a uma fiada finita que represente em extensão um conjunto e em que todo o símbolo não chaveta representa um urelemento. ▲

Notar que de acordo com esta definição,

[EVI.10] A expressão $\{a\}$ é uma urexpressão. ▼

[EVI.11] A expressão $\{a\}\}$ não é uma urexpressão, visto que não representa um conjunto. ▼

[EVI.12] A expressão $\{a\}\{b\}$ não é uma urexpressão, visto que não representa um conjunto. ▼

[EVI.13] A expressão $\{\{a\}\{a\}\}$ é uma urexpressão, pois representa um conjunto, ainda que com redundância. ▼

[EVI.14] A expressão $\{\mathbb{N}\}$ não é uma urexpressão, visto que contém o símbolo $'\mathbb{N}'$ que não representa um urelemento. ▼

[EVI.15] A expressão $\{\{a\}\{b\}\}$ é uma urexpressão, pois representa um conjunto. ▼

Do exposto pode concluir-se:

[TVI.05] O número de símbolos que formam uma urexpressão é sempre finito.

P Esta conclusão é consequência do facto de uma urexpressão ser sempre uma fiada finita e, portanto, uma expressão finita ■

[TVI.06] Uma urexpressão define sempre um conjunto finito.

P Esta conclusão é consequência do facto de todos os símbolos não chaveta representarem urelementos e que, numa urexpressão, os símbolos são sempre em número finito. ■

Além disso, é ainda possível concluir que:

[TVI.07] Uma urexpressão pode ser formada só por chavetas. ■

[TVI.08] A expressão $\{\}$, representante do conjunto vazio, é uma urexpressão.

P Esta conclusão é consequência directa da definição de urexpressão ■

[EVI.16] Relembre-se o conjunto representado pela expressões $\left\{\begin{matrix}\{a\}\\ \{ab\}\end{matrix}\right\}$, e $\{\{a\}\{ab\}\}$. Só a última expressão é que pode ser considerada uma urexpressão, pois a primeira não é uma fiada. ▼

[DVI.06] Duas urexpressões são **distintas**, diferentes, ou não iguais, se as fiadas literais de símbolos que as corporizam forem distintas. ▲

[DVI.07] Duas urexpressões são **idênticas**, indistintas, ou iguais, se as fiadas literais de símbolos que as corporizam forem idênticas. ▲

Existe uma ligação estreita entre urexpressões e fiadas literais. As urexpressões são fiadas. No entanto, estar a representá-las sempre como fiadas literais é pouco prático e inibe a sua interpretação como conjuntos. Isto, porque como se viu, a urexpressão $\{\}$ pode ser

encarada como um conjunto, $\varnothing$, ou como uma fiada, "$\{\}$". Esta multiplicidade semântica é feita de forma mutuamente exclusiva, de forma a nunca se poder concluir que a fiada literal é o conjunto vazio. Mas não é só com a urexpressão do conjunto vazio que tal acontece. Um conjunto é definido por uma urexpressão. Uma urexpressão é corporizada numa fiada literal concreta. Quando se lida com urexpressões em geral, acontece exactamente o mesmo fenómeno de multiplicidade semântica.

Fica pois convencionado que, quando se fala de urexpressões, está-se a pressupor a interpretação em termos de fiada literal, sendo necessário referir explicitamente o conjunto representado pela urexpressão quando se pretende dar primazia à outra interpretação.

[TVI.09] Urexpressões distintas podem representar o mesmo conjunto.

P [EVI.17] Por exemplo $\{a\{a\}\}$ e $\{\{a\}a\}$ ■.

[TVI.10] Conjuntos distintos não podem ter urexpressões idênticas.

P Se uma urexpressão define mais que um conjunto, como os distinguir? Por isso, têm de ser iguais. ■

VI.2 - Urconjuntos

Estão pois lançadas as bases que permitem aceitar que qualquer urexpressão representa sempre um conjunto finito e que existem conjuntos finitos representáveis por, pelo menos, uma urexpressão.

[DVI.08] Diz-se que um conjunto está definido em **urextensão**, ou de forma **urextensa**, sse for definido por uma urexpressão. ▲

Ou seja, um conjunto está definido em urextensão quando for definido em extensão, portanto por uma fiada finita e, além disso, que essa fiada só contenha: chavetas e possivelmente urelementos.

[EVI.18] Como outro exemplo, considerem-se p, q como urelementos e definam-se os seguintes conjuntos: A como sendo o singletão $\{p\}$, B como sendo o singletão $\{q\}$, $\Xi=\{pq\}$ e $\Gamma=\{AB\Xi\{pqA\}\}$. Seja G um conjunto tal que $G=\{\Xi\Gamma\}$. Tem-se assim que $G=\{\Xi\{AB\Xi\{pqA\}\}\}=\{\Xi\{A\Xi B\{pqA\}\}\}$ $G=\{\{pq\}\{\{p\}\{q\}\{pq\}\{pq\{p\}\}\}\}=\{\{pq\}\{\{p\}\{pq\}\{q\}\{pq\{p\}\}\}\}$. Nestas cinco expressões em extensão para o conjunto G, só as duas últimas é que são

urexpressões, pois são fiadas finitas formadas apenas e só por chavetas e urelementos. ▼

[EVI.19] Também a título de exemplo, e para reforçar o facto de que nem todos os conjuntos finitos podem ser representados por urexpressões, consideremos novamente o conjunto $V = \{\mathbb{N}\}$. Este conjunto V tem cardinalidade um, pois o seu único elemento é o conjunto $\mathbb{N}$. Mas o conjunto $\mathbb{N}$ não é finito, pelo que não pode ser representado por uma urexpressão. É assim finito o conjunto V, mas não pode ser representado por uma urexpressão. ▼

Com base no conceito de urexpressão, procede-se agora à definição de urconjunto. O conceito de urconjunto é basilar para a definição de dupla enquanto par ordenado tolerante.

[DVI.09] Dá-se o nome de **urconjunto** a qualquer conjunto representável por uma urexpressão. ▲

[TVI.11] Qualquer urconjunto é finito.

P Tem que ser finito, visto a urexpressão ser uma fiada finita ■

Com base no justamente exposto é de salientar que qualquer urconjunto nunca tem como elemento, quer directa quer indirectamente, qualquer conjunto que seja infinito. Se um elemento de um urconjunto é um conjunto, então também terá de ser um urconjunto. A secção que se segue clarifica esta questão.

VI.2.1 – Urconjuntos e conjuntos extraordinários

Em 1917, Dimitry Semionovich Mirimanof (Дми́трий Семёнович Мирима́нов) ao estudar as antinomias de Russell e de Burali-Forti propõe a definição de conjunto extraordinário (Mirimanof-1917).

3. — Je commencerai par introduire une notion dont nous nous servirons souvent.

Soient E un ensemble, E′ un de ses éléments, E″ un élément quelconque de E′, et ainsi de suite. J'appelle *descente* la suite des passages de E à E′, de E′ à E″, etc. Cette descente prend fin lorsqu'on tombe sur un élément indécomposable.

Je dirai qu'un ensemble est *ordinaire* lorsqu'il ne donne lieu qu'à des descentes finies ; je dirai qu'il est *extraordinaire* lorsque parmi ses descentes il y en a qui sont infinies.

De acordo com a terminologia empregue neste texto, uma reformulação possível, subtilmente dissemelhante, para o texto citado será:

[DVI.10] «Escolha-se um conjunto E. Admita-se que, se E for não vazio, seja possível escolher um qualquer dos seus elementos, E'. Admita-se que, se E' for um conjunto não vazio, seja possível escolher um qualquer dos seus elementos, E'', e assim sucessivamente. Chama-se **descida** à sequência das escolhas de E para E', de E' para E'', etc. Uma descida começa sempre no próprio conjunto E. Uma descida termina apenas e quando é escolhido um urelemento ou o conjunto vazio. Diz-se que um conjunto é **ordinário** (no sentido Mirimanof finito) quando <u>a totalidade das suas descidas é em número finito</u> e todas terminam após um número finito de escolhas. Um conjunto que não seja ordinário é dito de **extraordinário** (no sentido Mirimanof finito).» ▲

Notar que na definição anterior o sublinhado indica a dissemelhança mais vincada, pois obriga todos os conjuntos a serem finitos. Desta forma, fica assim definido o que se entende por um conjunto ordinário, ou extraordinário, no sentido Mirimanof finito, ou Miff.

[EVI.20] Seja $E = \mathbb{N} = \{1\ 2\ 3\ 4 \cdots\}$. Tem-se portanto que E' será sempre um número natural. Este conjunto não é ordinário no sentido Miff, pois embora todas as suas descidas sejam finitas, pois todas têm apenas uma única escolha, que é a de E para E', a totalidade das suas descidas não é finita, pois tem a cardinalidade de $\mathbb{N}$. Conclui-se assim que este conjunto é extraordinário no sentido Miff. ▲

Consequentemente, tem-se

[TVI.12] Para um conjunto poder ser representado por uma urexpressão é necessário e suficiente que seja ordinário no sentido Miff. ■

No teorema que se segue, o facto de uma urexpressão ter de ser finita impede, tal como argumentado na demonstração, que a recursividade presente no enunciado possa originar um número infinito de escolhas em qualquer descida.

[TVI.13] Para um conjunto finito poder ser representado por uma urexpressão é necessário e suficiente, que todos os seus elementos, ou sejam urelementos, ou sejam conjuntos representáveis por urexpressões.

P É necessário pois basta que um dos seus elementos não seja representável por uma urexpressão, para o conjunto já não o poder ser. E é também suficiente, pois qualquer urexpressão que participe na formação da sua urexpressão é também finita, pelo que não a pode tornar infinita. ■

Em termos informais estas definições garantem que um urconjunto nunca tem escondidos lá por dentro objectos de índole infinita.

[SVI.01] Que aconteceria se uma urexpressão, para um conjunto finito, pudesse ser formada por um número não finito de símbolos? Como tratar $A = \{\{\{\{\cdots\}\}\}\}$, algo que parece um singletão exótico, $A = \{a\}$ com $a = \{\{\{\cdots\}\}\}$, com cardinal igual a um, mas de índole infinita? Este hipotético conjunto, extraordinário no sentido Miff, seria indistinguível do seu elemento, $a = \{\{\{\cdots\}\}\}$. Se fosse um conjunto, viria $a \in A$ por construção. Mas também viria $a = A$ por definição de igualdade de conjuntos. Ora a validade de tal afirmação permitiria concluir quer que $A \in A$, quer que $A = \{A\}$, quer ainda que $a \in a$, por reescrita de $a \in A$ usando o facto $a = A$. Ou seja, entre outras consequências consideradas absurdas, o conjunto A seria elemento de si próprio. No sistema axiomático ZFC (Zermelo, Fraenkel, com o axioma da escolha, Choice), que é considerado

por muitos autores (Jech-2006) (Oliveira-1982) como sendo padrão para a teoria dos conjuntos, existe um axioma, o axioma da regularidade ou da fundação, que impede que tal aconteça, obstando qualquer conjunto de pertencer a si próprio. Daqui se conclui que, se uma urexpressão admitisse um número infinito de símbolos, poderia não representar um conjunto, no sentido ZFC. ♦

Como visto, para um conjunto poder ser representado por uma urexpressão é necessário e suficiente, que todos os seus elementos, ou sejam urelementos, ou sejam conjuntos representáveis por urexpressões.

[SVI.02] Neste ponto convém referir o conceito de Kleene, (Kleene-1951), segundo o qual é infinito o conjunto de todas as fiadas finitas não vazias, possíveis de elaborar com recurso a um único símbolo, p. ex. $'a'$. Esse conjunto seria pois $\{"a"\ "aa"\ "aaa"\ "aaaa" \cdots\}$, também representável como a^+. É discutível como é que o conjunto a^+ é infinito se todos os seus membros são finitos e o cardinal de a^+ é, por construção, igual ao comprimento do seu maior membro. Também segundo esta formulação, todo e qualquer número natural é finito, embora existam infinitos números. Para salientar a similitude de situações, basta escrever todos os naturais como fiadas de um único símbolo, a barra vertical, vindo que $1 = |$, $2 = ||$, $3 = |||$, $\cdots$, obtendo-se que $\mathbb{N} = \{|\ \ ||\ \ |||\ \ \cdots\}$. No entanto, neste texto, e em concordância com este discutível cânone, considera-se possível ter infinitos urconjuntos finitos, todos eles representados por urexpressões. ♦

VI.2.2 – Urconjuntos puros

[DVI.11] Um urconjunto cuja urexpressão só contenha chavetas é chamado de **urconjunto puro**. ▲

Notar que:

[TVI.14] Um urconjunto puro não possui urelementos. ■

[TVI.15] O conjunto vazio é um urconjunto puro. ■

[TVI.16] Todos os elementos de um urconjunto puro também são urconjuntos puros, eventualmente vazios (Shoenfield-1967). ■

[EVI.21] Como outro exemplo de urconjuntos puros podemos considerar os ordinais finitos de Von Neumann, em que o zero é representado por {}, o um por {0}= {{}}, o dois por {01}={{}{{}}}, o três por {012}={{}{{}}{{}{{}}}}, e assim por aí em diante. ▼

VI.2.3 – Urdomínios e ursimples

Se um urdomínio for finito, será um urconjunto e terá o nome de ursimples.

[DVI.12] Um conjunto ursimples, ou simplesmente um **ursimples** é um urconjunto tal que pode ser representado por uma urexpressão só com um par de chavetas. ▲

[TVI.17] Um ursimples é sempre um urdomínio. ■

[TVI.18] Um urdomínio finito é sempre um ursimples. ■

[EVI.22] $\mathbb{N}$ é um urdomínio que não é um ursimples. ▼

[EVI.23] $\{a\,bc\}$ é um conjunto ursimples que é um urdomínio. ▼

[TVI.19] Um ursimples é sempre um conjunto finito, eventualmente vazio. ■

[TVI.20] Todos os conjuntos ursingulares são também ursimples. ■

[TVI.21] A união de dois urdomínios tem como resultado um urdomínio. ■

[TVI.2x] A união de dois ursimples tem como resultado um ursimples. ■

[TVI.22] A intersecção de dois urdomínios tem como resultado um urdomínio, que pode ser um ursimples. ■

[TVI.22] A intersecção de dois ursimples tem como resultado um ursimples. ■

Propiciando a indentificação dos urelementos com símbolos, defina-se:

[DVI.13] Um ursimples pode ser chamado alfabeto finito ou simplesmente **alfabeto**.▲

[DVI.14] Os elementos de um ursimples podem ser chamados de **caracteres**. ▲

[DVI.15] O ursimples vazio é chamado **alfabeto vazio**. ▲

Existem autores, como (Cohen-1997), que aceitam o alfabeto vazio, inevitavelmente igual ao conjunto vazio, e outros autores, como (Allouche-2003) e (Salomaa-1985), que o rejeitam. Estes, assim como muitos outros autores, distinguem vincadamente entre alfabetos finitos e alfabetos infinitos. Além disso a esmagadora maioria das considerações que elaboram requerem explicitamente que os alfabetos sejam finitos.

[SVI.03] Neste texto os alfabetos finitos são equiparados com os ursimples, não ficando ainda estabelecida nenhuma equiparação entre alfabetos infinitos e urdomínios

em geral. Uma das razões porque tal equiparação não foi desenvolvida é porque não foi necessário considerar tuplos tolerantes de dimensão não finita. Num tuplo tolerante de dimensão finita, quer o número das ausências de urelementos, quer o número das presenças é necessáriamente finito. Não sendo assim, será necessário investigar as delicadezas formais de quando ambas (ausências ou presenças), ou apenas uma delas, são infinitas. Tal investigação transcende os objectivos deste texto. ♦

Continuando a tecer considerações sobre os ursimples, vem:

[DVI.16] Seja A um urconjunto. Representa-se por ${}^{ur}A$ o ursimples definido pela urexpressão que se obtém com a eliminação de todas as chavetas, exceptuando o par exterior, de uma urexpressão que defina A. ▲

Alargando esta última definição a urdomínios em geral, vem:

[DVI.17] Quando $\mathbb{A}$ é um urdomínio, tem-se que ${}^{ur}\mathbb{A} = \mathbb{A}$. ▲

Como por [TVI.17] qualquer ursimples é um urdomínio, vem:

[DVI.18] A ${}^{ur}A$ também se dá o nome de urdomínio *de* A. ▲

[EVI.24] Tanto $\{\{abc\}\}$ como $\{\{a\}\{b\}\{c\}\}$ têm $\{abc\}$ como urdomínio. ▼

[nDVI.01] Se A não for nem um urdomínio nem um urconjunto não é definido o que significa ${}^{ur}A$. ▲

[EVI.25] Desta forma, tem-se que ${}^{ur}\mathbb{N} = \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ é, como usual, o conjunto dos números naturais. Não está definido o que se entende por ${}^{ur}\{\mathbb{N}\}$, pois $\{\mathbb{N}\}$ é um singletão que não é um urconjunto. ▼

[TVI.23] Afirmar que um dado conjunto A admite urdomínio ${}^{ur}A$, não permite inferir que A é um urconjunto.

P Pode dar-se o caso de ${}^{ur}A = A$, como é o caso para o conjunto $\mathbb{N}$ que não é um urconjunto. ■

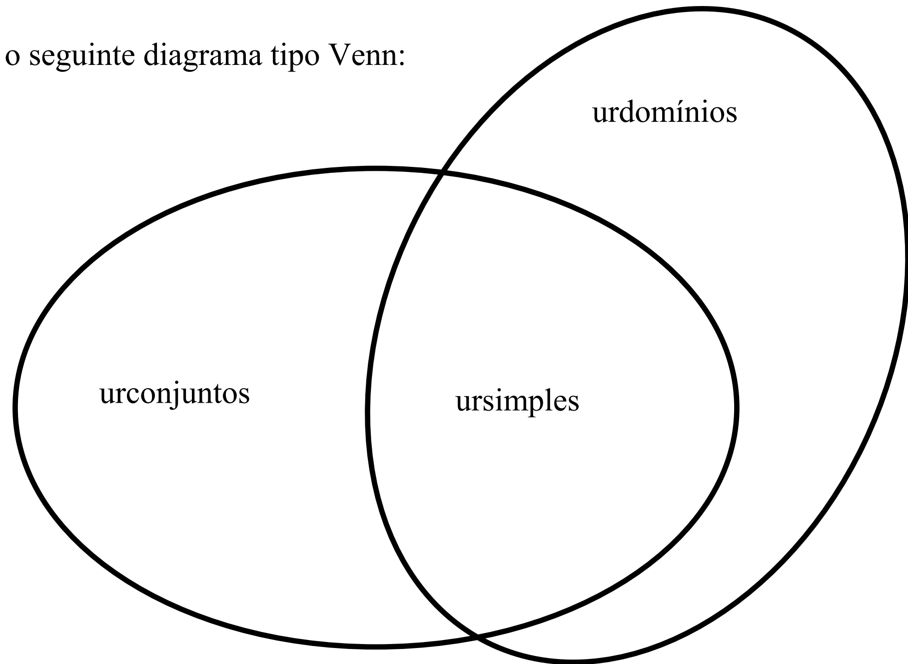
[TVI.24] Afirmar que um dado conjunto finito A admite urdomínio ${}^{ur}A$, já permite inferir que A é um urconjunto.

P Directamente pela definição [DVI.16], pois sendo um conjunto finito tem que ser um urconjunto para poder ter urdomínio. ■

[TVI.25] Um urconjunto é puro sse o seu urdomínio for o conjunto vazio.

P Para o urdomínio ser vazio, a sua urexpressão tem que ser formada apenas por chavetas. Um urconjunto cuja urexpressão seja formada apenas por chavetas tem que ser um urconjunto puro. ■

É possível intuir o seguinte diagrama tipo Venn:



VI.2.3.1 – Uramontoados

Vai agora abordar-se a questão da nomenclatura adequada para lidar com os urelementos quando estes ainda não formam um conjunto. Ou seja, vai lidar-se com questões do tipo: Se a e b são urelementos, e $\{ab\}$ um urconjunto, como referir adequadamente ab? Ou seja, a questão é como referir adequadamente uma pluralidade eventualmente singular ou mesmo vazia de urelementos que não tem interesse considerar "conjuntificados"? Esta questão é de relevo no tratamento de pares odenados tolerantes, que são chamados duplas.

Comece-se por definir o que é o uramontoado do conjunto vazio.

[DVI.19] O uramontoado do conjunto vazio é nada, $\hat{\varnothing}$, que também pode ser referido como o **uramontoado nulo** *ou vazio*. ▲

Informalmente, o uramontoado do conjunto vazio é nulo ou nada. O uramontoado nulo é uma ausência de símbolo, sem qualquer estrutura ou propriedade associada. Sendo assim, é

representado pelo símbolo específico para a ausência de símbolo, $\hat{\varnothing}$. A ausência de símbolo, $\hat{\varnothing}$, nunca é um urelemento pois no interior da expressão que representa o conjunto vazio não é colocado nenhum símbolo. Desta forma, quer $\{\hat{\varnothing}\}$, quer $\{\hat{\varnothing}\,\hat{\varnothing}\}$, representam o conjunto vazio. Da mesma forma, são iguais os conjuntos $\{a\,\hat{\varnothing}\}$ e $\{a\}$. Outros autores optam pela grafia *null* (Hehner-1993) para representar o uramontoado nulo.

[SVI.04] Pragmaticamente, $\{\hat{\varnothing}\}$ indica que `nada` está no interior do conjunto vazio, ou então, que é `nulo` o interior do conjunto vazio. Uma repetição, como $\{\hat{\varnothing}\,\hat{\varnothing}\}$, indica que vários `nadas` continuam a ser `nada`. Esta ligação entre a ausência de símbolo e a ausência de urelemento pode ser vista pelo avesso, em que urelementos e símbolos são indistinguíveis. Ao estipular uma equivalência geral entre urelementos e símbolos é necessário pressupor que qualquer número pode ser representado por um símbolo. Este pressuposto é admitido como válido e, concomitantemente, a equivalência geral também. ♦

Posto isto, aborde-se a definição geral, em que o "desconjuntificar" de um conjunto só é formalmente definido para urdomínios, sendo indicado por uma titulação com um parêntesis curvo cuja concavidade aponta para baixo.

[DVI.20] A totalidade dos urelementos presentes num urdomínio, ${}^{ur}A = \mathbb{A}$, é o **uramontoado**, $\overset{\frown}{{}^{ur}A} \triangleq \hat{\mathbb{A}}$, desse urdomínio. ▲

[DVI.21] Na expressão $\overset{\frown}{{}^{ur}A} \triangleq \hat{\mathbb{A}}$ tem-se que $\mathbb{A}$ que é referível como o urdomínio correspondente ao uramontoado $\hat{\mathbb{A}}$. e reciprocamente, é também referível que $\hat{\mathbb{A}}$ é o uramontoado correspondente ao urdomínio $\mathbb{A}$. ▲

Ou seja, todo o uramontoado tem um urdomínio correspondente e reciprocamente todo o urdomínio tem um uramontoado correspondente.

Como justamente indicado, é convencionado que:

[DVI.22] O nome do uramontoado é idêntico ao do correspondente urdomínio, sendo a discriminação efectuada pela titulação do nome do urdomínio com um parêntesis curvo deitado cuja concavidade aponta para baixo. ▲

A expressão formal de um uramontoado obtém-se reescrevendo a expressão do urdomínio sem as chavetas, mantendo as eventuais vírgulas auxiliares.

[EVI.26] Tem-se que $\widehat{\{a\}} = a$ e que $\widehat{\{a, b, c\}} = a, b, c$. ▼

Convém salientar que, quer do ponto de vista terminológico, quer em termos léxico-semânticos, os urelementos pertencem aos conjuntos e **constituem** os uramontoados. Assim diz-se que um urelemento pertence a um conjunto. Também se diz que um urelemento é **constituinte** de um uramontoado. Um conjunto, em geral, possui elementos, que lhe pertencem. Um uramontoado, em geral, é constituído por urelementos.

O seguinte exemplo ilustra a naturalidade desta terminologia.

[EVI.27] Considere-se a equação polinomial $(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) = 0$, em que todos os z_i são distintos. O conjunto das soluções desta equação é $\{z_1, z_2, z_3\}$, um urdomínio. As soluções desta equação são z_1, z_2, z_3 , um uramontoado. Notar como é comum dizer-se que z_1 pertence ao conjunto das soluções. Também é comum dizer-se que z_1 constitui uma das soluções. ▼

Como se vê no exemplo [EVI.26], o uramontoado de um conjunto ursingular $\{a\}$ é apenas o único urelemento, a . Neste caso, o uramontoado é constituído apenas pelo urelemento, ou seja o uramontoado é o urelemento.

O seguinte exemplo ilustra porque é que esta definição [DVI.20] utiliza a igualdade tolerante, $\hat{=}$, a igualdade da lógica trivalente, descrita em [DIV.11]-[DIV.16].

[EVI.28] Seja A um urconjunto puro. Sem perda de generalidade pode considerar-se que A pode ser concretizado como $A = \{\{\{\ \}\}\{\ \}\}$. Pelo teorema [TVI.25] tem-se que para o caso de um urconjunto puro $^{ur}A = \varnothing$. Ora o uramontoado do conjunto vazio é $\hat{\varnothing}$, por definição [DVI.19]. Como se viu no cap. IV, a lógica adequada para lidar com igualdades em que conste $\hat{\varnothing}$ não pode ser a bivalente, tendo de ser uma lógica tolerante, trivalente. Em conclusão, a definição [DVI.20] tem de utlizar a igualdade trivalente, $\hat{=}$, para poder contemplar caso como $\widehat{^{ur}\varnothing} \hat{=} \hat{\varnothing}$. ▼

Refira-se que, para uramontoado, Hehner utiliza o termo *bunch* (Hehner-1993).

[SVI.05] Para Hehner a vírgula não é apenas um separador gráfico, facilitador da leitura e de cariz opcional. Segundo ele, a vírgula realiza uma «concatenação comutativa e associativa». A definição formal de operações não fechadas, em

que os resultados não são elementos do mesmo conjunto dos argumentos, ainda não foi abordada em termos gerais. Consequentemente, ainda não estão adequadamente preparadas a definições gerais de comutatividade e associatividade para as operações não fechadas, sendo preferível considerar a vírgula, por ora, como uma mero facilitador. ♦

[nDVI.02] Não fica definido o que se entende por uramontoado de um conjunto que não seja um urdomínio. ▲

[TVI.26] Seja A um urconjunto não puro. Tem-se que $\hat{A} = \widehat{{}^{ur}A}$ sse $A = {}^{ur}A$.

P Directamente a partir das definições [DVI.19] e [DVI.20]. ■

[TVI.27] Afirmar que um dado conjunto A admite uramontoado $\hat{A}$, permite inferir que A é um urdomínio.

P Directamente a partir de [TVI.26] e [DVI.20]. ■

Aborde-se agora a questão da igualdade de uramontoados. Estas definições são elaboradas de forma a manter a igualdade dos correspondentes. Ou seja pretende-se que se dois urdomínios são iguais, os correspondentes uramontoados também o são, e recíprocamente.

[DVI.23] Todos os uramontoados nulos são iguais. ▲

Tal como para o conjunto vazio, em que não se fala de conjuntos vazios mas do conjunto vazio, também é boa prática falar do uramontoado nulo em lugar de uramontoados nulos.

[DVI.24] Dois uramontoados não nulos são iguais sse forem constituídos pelos mesmos urelementos. ▲

Tal como para os conjuntos, a repetição ou a ordem de apresentação dos urelementos é indiferente, pelo que o uramontoado a, b, c e o uramontoado a, c, b, a são idênticos.

Convém distinguir entre constituintes reais ou presentes e constituinte irreal ou nunca presente, sempre ausente.

[DVI.25] Os urelementos constituintes de um uramontoado são os **constituintes reais** desse uramontoado. ▲

[DVI.26] Os constituintes reais de um uramontoado também podem ser referidos como os **constituintes presentes** nesse uramontoado. ▲

O uramontoado nulo é constituinte de qualquer amontoado, mas nunca é considerado como sendo um constituinte presente. O uramontoado nulo nunca é um urelemento.

[DVI.27] O uramontoado nulo é considerado **constituinte irreal** de qualquer uramontoado. ▲

[DVI.28] O constuinte irreal é considerado uma ausência de urelemento podendo ser referido como um **constituinte nunca presente**, sempre ausente. ▲

Informalmente «um uramontoado é constituído por urelementos e por nada» o que também pode ser equivalentemente descrito «um uramontoado é constituído por nada e por urelementos».

Ser o urlemento mais nada é ser o urelemento. Se na constituição de um uramontoado está presente apenas um urelemento então o uramontoado é o urelemento mais nada. Cada urelemento é um uramontoado. Só aos constituintes reais é que é aplicável o conceito de pertença, $\in$, a conjuntos.

[SVI.06] Ao constituinte irreal não é aplicável o conceito de pertença, embora se possa intuir um conceito aplicável, $\hat{\in}$, a pertença tolerante, tal que $\left(\vdots\hat{\varnothing} \mathrel{\hat{\in}} X \vdots\right) =: \ddot{\mathrm{V}}$. ♦

[SVI.07] Pode considerar-se que os uramontoados são constituídos por urmontoados embora não se vá desenvolver, por ora, nenhuma “algebra de operações” em uramontoados. Note-se no entanto que a algebra de conjuntos aplicada a urdomínios induz uma “algebra” para os uramontoados. ♦

[DVI.29] O número de constituintes reais de um uramontoado é únicamente definido e igual à cardinalidade do urdomínio correspondente. ▲

[DVI.30] O número de constituintes irreais de um uramontoado é únicamente definido como zero. ▲

[DVI.31] O número de constituintes de um uramontoado é definido como a soma aritmética do número de constituintes reais com o número de constituintes irreais. ▲

De acordo com as definições anteriores o número de constituintes de um uramontoado é o número de constituintes reais. Informalmente, o constituinte irreal está lá mas não faz nada.

[DVI.32] Chama-se **componente** a qualquer uramontoado cujo número de constituintes seja no máximo um. ▲

Esta última definição é muito importante. Um urelemento nunca pode ser $\hat{\varnothing}$, mas uma componente já pode ser $\hat{\varnothing}$. Esta distinção será recordada oportunamente, pois é essencial para lidar com as componentes de duplas tolerantes.

[DVI.33] Chama-se componente **ausente** ou **nula** a qualquer uramontoado cujo número de constituintes seja zero. ▲

[DVI.34] Chama-se componente **presente** ou **não nula** a qualquer uramontoado cujo número de constituintes seja um. ▲

Notar que um uramontoado não é uma fiada e que o uramontoado nulo não é a fiada nula. Da mesma forma, um conjunto não é uma fiada e o conjunto nulo, ou vazio, não é a fiada nula, ou vazia.

Como se viu, um uramontoado é constituído por elementos. Significa isto que, sendo $\mathbb{A}$ um urdomínio e a um seu elemento, é tão correcto afirmar que a é constituinte do uramontoado $\hat{\mathbb{A}}$, como é correcto afirmar que $a \in \mathbb{A}$.

Por vezes é necessário representar simbólicamente o ser constituinte.

[DVI.35] O símbolo $\prec\!\mathrm{c}$ lê-se "**é constituinte real de**". ▲

[DVI.36] O símbolo $\widehat{\prec\!\mathrm{c}}$ lê-se "**é constituinte de**". ▲

[DVI.37] O símbolo $\not\prec\!\mathrm{c}$ lê-se "**não é constituinte real de**". ▲

[DVI.38] O símbolo $\widehat{\not\prec\!\mathrm{c}}$ lê-se "**não é constituinte de**". ▲

Para os urelementos, ser constituinte é equivalente a ser constituinte real.

[EVI.29] A expressão $a \prec\!\mathrm{c}\ \hat{\mathbb{A}}$ afirma que o urelemento a é constituinte (ou mais rigidamente: constituinte real) do uramontoado $\hat{\mathbb{A}}$. Ou seja, que $a \in \mathbb{A}$. ▼

Outros autores, como Hehner (Hehner-1993), preferem afirmar que a é constituinte do uramontoado $\hat{\mathbb{A}}$ usando a grafia alternativa $a \mathrm{¢} \hat{\mathbb{A}}$. Esta grafia foi preterida neste texto, pois a barra inclinada induz confusão com uma afirmação de índole negativa como quando é o caso de "não é constituinte".

[nDVI.03] Não fica definido o que significa um urelemento pertencer a um uramontoado, ou ser constituinte de um conjunto, ou seja, as expressões $a \in \hat{\mathbb{A}}$ e $a \prec\!\mathrm{c}\ \mathbb{A}$ são consideradas como desprovidas de sentido. ▲

[SVI.08] Notar que vigorando universalmente, por hipótese, uma lógica bivalente, tem-se que toda e qualquer expressão: ou tem um dos valores lógicos, ou tem o outro, não existindo uma terceira possibilidade. No entanto, ao admitir que determinadas expressões podem não ter sentido por uma razão qualquer, neste caso por serem consideradas expressões incompletas, está-se, de facto, a inibir a valência universal da lógica bivalente. Repare-se que quando se afirma que uma expressão não tem sentido é quase sempre subentendido que a expressão não tem possibilidade de ter sentido em termos da habitual lógica bivalente. Consequentemente, o valor lógico de expressões consideradas incompletas ou sem sentido, ou seja, sem possibilidade de valor lógico bivalente, só pode ser devidamente expresso se a lógica em vigor admitir mais valores tendo, no mínimo, de ser trivalente. Notar que é possível considerar uma extensão trivalente da lógica bivalente em que "desprovido de valor (bivalente)" pode ser um dos valores da lógica trivalente. Demonstra-se, (Serro-2003), que a álgebra apropriada a uma lógica trivalente já não é booleana. ♦

Seja $\widehat{\mathbb{A}}$ um uramontoado qualquer.

[DVI.39] A expressão $\hat{\varnothing} \,\widehat{\prec\mathsf{c}}\, \hat{\mathbb{A}}$, formalmente idêntica à expressão $\widehat{\prec\mathsf{c}}\, \hat{\mathbb{A}}$, é considerada como tendo sempre o trivalor $\ddot{\mathsf{V}}$. ▲

O uramontoado nulo, $\hat{\varnothing}$, é constituinte (irreal) de qualquer uramontoado.

[DVI.40] A expressão $\hat{\varnothing} \,\widehat{\not\prec\mathsf{c}}\, \hat{\mathbb{A}}$, formalmente idêntica à expressão $\widehat{\not\prec\mathsf{c}}\, \hat{\mathbb{A}}$, é considerada como tendo sempre o trivalor $\ddot{\mathsf{F}}$. ▲

[EVI.30] A expressão $\hat{\varnothing} \in A$, formalmente idêntica à expressão $\in A$, é considerada como não podendo assumir qualquer dos bivalores, $\ddot{\mathsf{V}}$ ou $\ddot{\mathsf{F}}$. ▼

[EVI.31] A expressão $\hat{\varnothing} \notin A$, formalmente idêntica à expressão $\notin A$ é considerada como não podendo assumir qualquer dos dois valores lógicos, $\ddot{\mathsf{V}}$ ou $\ddot{\mathsf{F}}$. ▼

[SVI.09] Uma indagação sobre o que pertence ao conjunto vazio só poderia conduzir a $\hat{\varnothing}$, mas tal obriga a considerar, no contexto de uma lógica pelo menos trivalente, a definição da pertença tolerante, $\hat{\in}$, e mesmo da igualdade tolerante, $\hat{=}$. Note-se que existem linguagens, como o SQL cuja nomenclatura para $\hat{\varnothing}$ é

null, que permitem a projecção tolerante e a obtenção de *null*s. Note-se também que, na maior parte dos dialectos de SQL, a expressão *null = null* não tem resultado nem V nem F. Torna-se assim necessário definir o que se deve entender por $\hat{\varnothing} \hat{=} \hat{\varnothing}$, pois não pode ser nem $\ddot{\mathsf{V}}$ nem $\ddot{\mathsf{F}}$.
Mais informações sobre este assunto podem se encontradas em (Codd-1979) e neste texto no capítulo IV - Tolerância e lógica trivalente, onde se definiu que $\hat{\varnothing} = \hat{\hat{\varnothing}}$ tem o valor lógico $\ddot{\mathsf{V}}$. ♦

[EVI.32] A expressão $\hat{\varnothing} = \hat{\varnothing}$, formalmente idêntica à expressão $=$ é considerada como não podendo assumir qualquer dos dois valores bilógicos, $\ddot{\mathsf{V}}$ ou $\ddot{\mathsf{F}}$. ▼

VI.2.4 – Urcardinalidade

[DVI.41] Chama-se **urcardinalidade** de um urconjunto A, à cardinalidade do seu ursimples ${}^{ur}A$. ▲

A urcardinalidade representa o número de urelementos presentes no uramontoado de ${}^{ur}A$. É sempre finita.

[nDVI.04] Não é definido o que se entende por urcardinalidade de algo que não seja um urconjunto. ▲

[EVI.33] O urdomínio $\mathbb{N}$ tem cardinalidade, mas não tem urcardinalidade.

[DVI.42] Relembrando que $|A|$ ou $\#A$ representa a cardinalidade de A, convenciona-se que $|{}^{ur}A|$ ou $\#{}^{ur}A$ representa a sua urcardinalidade. ▲

[nDVI.05] Não fica definido o significado de ${}^{ur}|A|$. ▲

[EVI.34] Seja $A = \{a\{a\}\{a\{a\}\}\}$. Tem-se que $|A| = 3$, mas que $|{}^{ur}A| = 1$, pois ${}^{ur}A = \{a\}$. ▼

No caso geral, se o urconjunto A não for um ursimples, a urcardinalidade e a cardinalidade não têm de ser iguais, podendo dar-se qualquer um dos três casos possíveis:

O caso $|A| > |{}^{ur}A|$, como exemplificado acima

O caso $|A| < |{}^{ur}A|$, um exemplo do qual é $A = \{\{a\,b\,c\}\}$

O caso $|A| = |{}^{ur}A|$, um exemplo do qual é $A = \{\{a\}\{b\}\{c\}\}$, tendo-se que ${}^{ur}A = {}^{ur}\{\{a\}\{b\}\{c\}\} = \{abc\}$.

No entanto, têm de ser iguais, $|A| = |{}^{ur}A|$, pela própria de definição de urcardinalidade, se o urconjunto já for um ursimples, ou seja, quando já se tinha $A = {}^{ur}A$.

VI.3 – UrexpressõesNR e urexpressõesR

Para definir que urexpressões é que podem representar um par ordenado tolerante é necessário considerar que redundância apresentam. Isto porque, conforme se verifica, um urconjunto pode ser expresso por mais do que uma urexpressão. De acordo com a definição apresentada, as seguintes urexpressões representam o mesmo conjunto: $\{a\{b\}\}$, $\{a\{bb\}a\}$, $\{a\{bb\}a\{b\}a\}$, pois na exposição em extensão de um conjunto, as repetições são formalmente indiferentes.

[DVI.43] Relativamente a um urconjunto, diz-se que uma urexpressão é **possível** se o representar. ▲

[DVI.44] Escolha-se um urconjunto. Para o urconjunto escolhido, cada urexpressão possível vai ter um certo número de símbolos que será, no mínimo, um determinado inteiro positivo N.
Para esse urconjunto, todas as urexpressões com N símbolos serão chamadas de **urexpressõesNR**, não redundantes, que admite a abreviatura prática urNR.
Para esse urconjunto, todas as urexpressões com mais do que N símbolos serão chamadas de **urexpressõesR**, redundantes. ▲

[DVI.45] Consideram-se equivalentes as urexpressõesNR que, sendo distintas enquanto fiadas de símbolos, representam o mesmo conjunto. ▲

[EVI.35] Assim, $\{a\{b\}\}$ e $\{\{b\}a\}$ são urexpressõesNR distintas, mas equivalentes. ▼

[nDVI.06] Não fica definida a equivalência, ou não equivalência, entre urexpressõesR, especialmente se representarem o mesmo conjunto. ▲

Quando se refere uma urexpressão, esta pode ser uma urexpressãoNR ou uma urexpressãoR.

[nDVI.07] Não fica estipulada nenhuma convenção prática que permita inferir que o termo urexpressão é uma simplificação quer do termo urexpressãoNR, quer do termo urexpressãoR. ▲

Por esta ordem de ideias, referir “urexpressões equivalentes” é desaconselhado, sendo preferível referir “urexpressõesNR equivalentes”, abreviado, agora sim, em termos práticos para “urNR equivalentes”.

[DVI.46]. A sigla urNR é tanto singular como plural. ▲

[SVI.10] Foi considerada a hipótese de definir urexpressões equivalentes como sendo aquelas que representavam o mesmo urconjunto. No entanto, como se verá, se a definição fosse esta, o tratamento das compartimentações e respectiva numeração não seria simplificado, nem se obteria qualquer outro benefício adequado à exposição em curso. ♦

VI.3.1 – Compartimentação de um urconjunto

O conceito de compartimentação de um urconjunto só liga à estrutura de chavetas, ignorando a colocação dos urelementos. No fundo, a compartimentação de um conjunto é apenas a fiada constituída pelas chavetas interiores numa urNR desse conjunto. A compartimentação de um conjunto é uma fiada constituída apenas por chavetas.

[DVI.47] Chama-se fiada de compartimentação de um urconjunto, ou simplesmente **compartimentação**, com sigla genérica Cop, à fiada de chavetas que se obtém quando se esvazia uma urNR, quer dos urelementos presentes, quer também da primeira e da última chaveta. ▲

[EVI.36] A compartimentação do urconjunto $\{a\{a\}\{b\{a\}\}\}$ será representada pela fiada literal $"\{\}\{\{\}\}"$. ▼

[DVI.48] Uma fiada nula é a compartimentação nula. ▲

[EVI.37] A compartimentação do conjunto vazio é a compartimentação nula. ▼

De acordo com esta definição, que elimina sempre a primeira e a última chaveta da urNR, a compartimentação do conjunto vazio ou a de qualquer conjunto ursingular, é uma fiada nula, $""$. Além disso, como se verá no imediato, a contagem das compartimentações está directamente relacionada com os números de Catalan.

[DVI.49] Duas compartimentações são **distintas**, ou não iguais, se as fiadas que as corporizam forem distintas. Duas compartimentações são **idênticas**, ou iguais, se as fiadas que as corporizam forem idênticas. ▲

[EVI.38] Conjuntos distintos podem exibir compartimentações idênticas, como é o caso de $\{\}$ e de $\{a\}$. ▼

[EVI.39] Conjuntos iguais podem exibir compartimentações distintas, como é o caso de $\{\{\ \}\{\{a\}\}\}$, cuja compartimentação é "$\{\ \}\{\{\ \}\}$", e de $\{\{\{a\}\}\{\ \}\}$, cuja compartimentação é "$\{\{\ \}\}\{\ \}$". ▼

[DVI.50] Duas compartimentações distintas são consideradas **equivalentes** quando puderem ser originadas por urNR equivalentes. ▲

De acordo com o exposto, uma sequência de chavetas constitui uma compartimentação válida sse:

a) Contiver o mesmo número de chavetas a abrir e a fechar

b) Quando percorrida da esquerda para a direita, o número acumulado de chavetas que abriu é sempre superior ou igual ao das que fechou, sendo a igualdade sempre atingida aquando da última.

Notar que a condição a) pode ser deduzida da condição b).

[DVI.51] Uma sequência de chavetas com esta propriedade também é referido como sendo um sistema de parêntesis (Bernardi-2006). ▲

[DVI.52] Um sistema de parêntesis também é chamado de sequência com os parêntesis equilibrados. ▲

Considere-se o âmbito da teoria das linguagens formais e álgebras de Kleene. Tem-se que

- A expressão Σ^* representa o conjunto de todas as fiadas finitas possíveis de sintetizar a partir de um alfabeto Σ.
- A expressão $|s|_\omega$ representa o número de ocorrências do caracter $\omega \in \Sigma$ numa fiada $s \in \Sigma^*$.
- A expressão $\rho_n(s)$ representa o prefixo de ordem n da fiada s, ou seja, na leitura sequencial da esquerda para a direita representa a fiada constituída pelos primeiros $n \in \mathbb{N}_0$ caracteres da fiada s, mantendo-se a ordem porque estão dispostos em s. A representação do prefixo genérico omite a indicação da ordem n.

Neste âmbito, a definição de sistema de parêntesis é a seguinte (Bernardi-2006):

[DVI.53]: Seja Σ um alfabeto com pelo menos dois símbolos, ω e $\overline{\varpi}$. Diz-se que um elemento s de Σ^*, com prefixo genérico $\rho(s)$, constitui um sistema de parêntesis sse:

a) $|s|_\omega = |s|_{\overline{\varpi}}$ (Na fiada s, são tantos os parêntesis a abrir como a fechar)

b) $|\rho(s)|_\omega \leq |\rho(s)|_{\overline{\varpi}}$ (Num prefixo de s, nunca há mais parêntesis fechados que abertos). ▲

De acordo com o exposto, os símbolos ω e $\overline{\varpi}$ tanto podem representar parêntesis, como chavetas. Por isso, no seguimento, serão referidos de forma mimética quer como parêntesis, quer como chavetas, sendo a referência concreta efectivamente usada apenas condicionada pela conveniência expositória.

[DVI.54] Uma sequência equilibrada de parêntesis, ou mais simplesmente, uma **sequência equilibrada**, é o nome dado a uma sequência com os parêntesis equilibrados e onde não conste mais nenhum outro símbolo de Σ, para além de ω e $\overline{\varpi}$. ▲

Notar a diferença entre "sequência equilibrada de parêntesis" e "sequência com os parêntesis equilibrados". Na primeirra só constam parêntesis enquanto qu na segunda podem constar outros símbolos.

Uma fiada formada por duas chavetas pode ser equilibrada, "$\{\}$", ou não, "$\{\{$", "$\}\}$", "$\}\{$". Normalmente, quando se referir um par de chavetas, é pressuposto que se refere um par de chavetas equilibrado, sendo as eventuais excepções devidamente assinaladas.

[TVI.28] Se numa sequência com os parêntesis equilibrados forem eliminados todos os símbolos não parêntesis o que se obtém ainda é uma sequência equilibrada. ■

[TVI.29] Toda e qualquer compartimentação é uma sequência equilibrada e toda e qualquer sequência equilibrada constitui uma compartimentação. Existe uma correspondência bijectiva entre elas. ■

[EVI.40] Assim, "$\{\}\{\}$" constitui uma sequência equilibrada, e também representa uma compartimentação. ▼

No entanto, a compartimentações equivalentes podem corresponder distintas sequências equilibradas de parêntesis.

[EVI.41] Tal é o que acontece com os urconjuntos $\{\{a\}\{\{a\}\}\}$ e $\{\{\{a\}\}\{a\}\}$, onde a é um urelemento. Estes urconjuntos são iguais, pelo que as suas urNR, e concomitantemente as compartimentações, são equivalentes, embora sejam fiadas distintas e, portanto, compartimentações distintas. Distintas mas equivalentes. ▼

[EVI.42] Por serem fiadas distintas, as sequências equilibradas, $\{\}\{\{\}\}$ e $\{\{\}\}\{\}$ também têm de ser consideradas distintas. ▼

VI.3.2 – Ordem do sistema de parêntesis e números de Catalan

[DVI.55] Chama-se **ordem do sistema de parêntesis** ao inteiro não negativo $n = |s|_\omega,\ n \in \mathbb{N}_0$. ▲

Um sistema de parêntesis de ordem nula tem $|s|_\omega = 0$, ou seja, não exibe parêntesis embora estes existam no alfabeto Σ.

O número de sequências equilibradas distintas com a mesma ordem n é um dos significados da bem conhecida sequência dos números de Catalan, (Koshy-2008): $\text{Catalan}[n] = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$, com matrícula A000108 na OEIS™ e cujos primeiros termos são 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, … .

Consequentemente, o número de compartimentações distintas e o número de sequências equilibradas distintas é o mesmo, pois faz-se corresponder a sequência equilibrada com zero parêntesis, a sequência equilibrada nula, à compartimentação do conjunto vazio (Brualdi-1999).

[DVI.56] Chama-se **ordem da sequência** equilibrada à ordem do sistema de parêntesis correspondente. ▲

[DVI.57] Chama-se **ordem da compartimentação** à ordem da correspondente sequência equilibrada. ▲

Dada uma ordem n, existem assim $\text{Catalan}[n]$ compartimentações distintas com essa mesma ordem. O conjunto dessas compartimentações é representado por C_n, tendo-se pois que $\#C_n = \text{Catalan}[n]$.

[TVI.30] Duas compartimentações só podem ser equivalentes se tiverem a mesma ordem, mas nem todas as compartimentações com a mesma ordem são equivalentes.

P Caso {}{}{} versus {{{}}}. ■

[DVI.58] Define-se o conjunto de todas as compartimentações equivalentes como sendo a **classe de equivalência de uma compartimentação**. ▲

[TVI.31] A toda e qualquer classe de equivalência de compartimentações, é possível fazer corresponder de forma bijectiva uma partição do círculo por $n \in \mathbb{N}_0$ círculos que não se intersectam e onde à compartimentação do conjunto vazio corresponderá o círculo íntegro.

P Basta alinhar os centros dos círculos, redimensionando-os de forma a que nunca se intersectem, cobri-los com uma banda e considerar os arcos circulares dentro da banda como parêntesis ou chavetas. ■

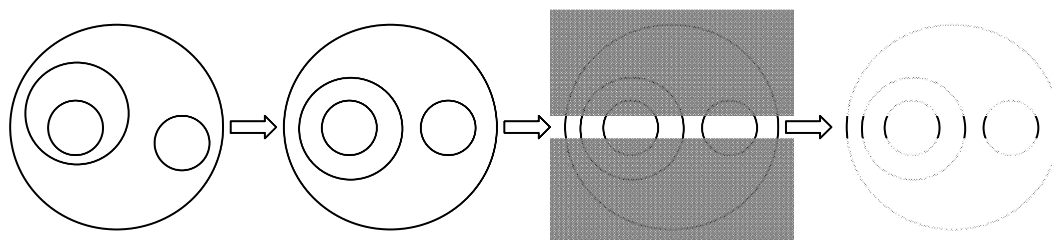


Fig. VI.1: Compartimentação e círculos

Desta forma, à compartimentação nula corresponderá,

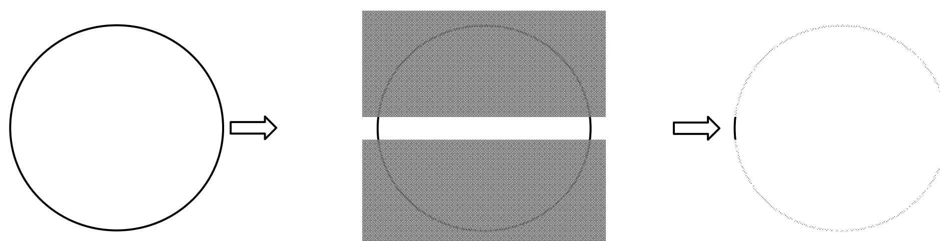


Fig. VI.2: Compartimentação nula

Notar como, ao considerar como chavetas os arcos circulares obtidos, se reconhece o conjunto vazio.

[DVI.59] Dado o conjunto das C_n compartimentações distintas de ordem n, é possível considerar a sua partição $\Theta[C_n]$, em $\theta \in \mathbb{N}$ classes de equivalências de compartimentações. ▲

[EVI.43] As compartimentações $\{\{\}\}$ e $\{\}\{\}$ são da mesma ordem, mas não são equivalentes. ▼

[EVI.44] Considere-se o conjunto C_3, de todas as compartimentações distintas de ordem três. Esse conjunto terá Catalan[3] elementos, ou seja, terá cinco fiadas como seus elementos, que são

"$\{\}\{\}\{\}$", "$\{\{\}\}\{\}$", "$\{\}\{\{\}\}$", "$\{\{\}\{\}\}$" e "$\{\{\{\}\}\}$",

a que correspondem as seguintes quatro classes de equivalência:

$\{$"$\{\}\{\}\{\}$"$\}$, $\{$"$\{\{\}\}\{\}$" "$\{\}\{\{\}\}$"$\}$, $\{$"$\{\{\}\{\}\}$"$\}$, $\{$"$\{\{\{\}\}\}$"$\}$.

Notar que cada uma destas classes de equivalência é um conjunto de fiadas. ▼

[EVI.45] Considere-se que a uma urexpressão se retiram todas as chavetas menos as exteriores. Obtém-se um conjunto que é um urdomínio, cuja compartimentação é necessariamente nula, "". ▼

[EVI.46] A compartimentação do conjunto vazio e de um urdomínio são idênticas. ▼

Um uramontoado não exibe compartimentação, nem sequer a nula. Sendo assim, é possível convencionar que não há representação simbólica para a compartimentação de um uramontoado.

[DVI.60] A compartimentação de um uramontoado é $\hat{\varnothing}$. ▲

Notar que a compartimentação de um conjunto vazio é a fiada nula, "", e que a fiada nula é distinta de $\hat{\varnothing}$.

Coloca-se a questão: dado n, qual o θ? Ou seja, para uma dada ordem, quantas classes de equivalência existem? Convenciona-se que $\theta[\hat{\varnothing}]=0$, pelo se passa a ter que $\theta \in \mathbb{N}_0$. A resposta a esta questão vem então: $\theta[\hat{\varnothing}]=0$, $\theta[0]=1$, $\theta[1]=1$, $\theta[2]=2$, $\theta[3]=4$, $\theta[4]=9$, $\theta[5]=20$, $\theta[6]=48$, …. Obtém-se assim a sequência ordenada $0, 1, 1, 2, 4, 9, 20, 48, \cdots$. Esta sequência é conhecida e está matriculada como A000081 na OEIS™.

VI.3.3 – Equivalência de compartimentações: A numeração de Matula

Vai ser agora apresentada uma forma de numeração das compartimentações que atribui um número único e invariante a compartimentações que sejam equivalentes.

[TVI.32] Dois urconjuntos puros iguais têm compartimentações equivalentes. ■

[TVI.33] Compartimentações equivalentes representam, quando envolvidas por um par de chavetas equilibradas, o mesmo urconjunto puro. ■

[TVI.34] Dois urconjuntos puros só podem ter a mesma compartimentação se forem iguais.

P Visto a expressão da compartimentação coincidir, uma vez completada pelas chavetas exteriores, com a expressão do urconjunto. ■

[EVI.47] Por exemplo, em termos de numerais de Von Neumann (Jech-2006), o três pode ser escrito como {{}{{}}{{}{{}}}} ou como {{{}}{{}{{}}}{}}, ou mesmo ainda como {{{}}{{{}}{}}{}}, sem esgotar as representações possíveis. Tem-se assim que as correspondentes compartimentações {}{{}}{{}{{}}}, {{}}{{}{{}}}{} e {{}}{{{}}{}}{} são todas equivalentes. ▼

Como se viu, a contagem das compartimentações distintas, mas com a mesma ordem, conduz à sequência dos números de Catalan. No entanto, também como se viu, algumas compartimentações distintas podem ser consideradas equivalentes, pois são provenientes de urNR equivalentes. Coloca-se naturalmente a seguinte questão:

Como determinar a equivalência de duas compartimentações com a mesma ordem, mas distintas?

Existe um método de numeração devido a David W. Matula (Matula-1968), que determina a atribuição de um único número natural a toda e qualquer compartimentação e que convenientemente, atribui o mesmo número natural a compartimentações equivalentes e números naturais distintos a compartimentações não equivalentes. Além disso, todos os números naturais são empregues, pelo que se pode falar da *n*-ésima compartimentação (mais rigorosamente, da *n*-ésima classe de equivalência das compartimentações), para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Existe assim uma bijecção entre os números naturais e as classes de equivalência das compartimentações. Esta numeração é conhecida como a numeração de Matula, tendo a

bijecção sido demonstrada por F. Göbel, (Göbel-1980). É por vezes referida como a bijecção de Matula-Göbel ou Matula-Goebel (OEIS™; Karttunen-2007)

Comece-se por relembrar a numeração sequencial dos números primos, $\mathsf{P}[n]$. Na numeração sequencial dos primos, $\mathsf{P}[n]$, atribui-se o número 1, $n=1$, ao número primo dois, o número 2, $n=2$, ao número primo três, o número 3, $n=3$, ao cinco, o número 4 ao sete, o número 5 ao 11, e assim por aí em diante. O termo geral desta sequência é representado por $\mathsf{P}[n], n \in \mathbb{N}$.

[EVI.48] Por exemplo, o primo nº 20 será o número setenta e um, $\mathsf{P}[20]=71$. ▼

O número um, 1, não é considerado primo. Pode no entanto convencionar-se que $\mathsf{P}[n], n \in \mathbb{N}_0$, e que $\mathsf{P}[0]=1$. Desta forma o primeiro primo será o dois, e o zero-ésimo primo será o um.

A numeração de Matula utiliza a numeração sequencial dos números primos, $\mathsf{P}[n]$ para estabelecer uma bijecção entre as compartimentações (mais rigorosamente, as classes de equivalência das compartimentações) e os números naturais com zero, $\mathbb{N}_0$. Convenciona-se que:

[DVI.61] Nesta numeração ao conjunto vazio, $\{\}$, cuja compartimentação é a compartimentação nula, corresponde o número $\mathsf{P}[0]=1$. ▲

Como se verá, deste modo garante-se a bijecção com $\mathbb{N}_0$.

A regra geral para estabelecer a correspondência entre as compartimentações e $\mathbb{N}_0$ consiste no seguinte procedimento, sucessivamente modificador da fiada de compartimentação, que, como se sabe, é formada apenas por chavetas:

a) Transforme-se a fiada de compartimentação em análise, a fiada original, envolvendo-a num par de chavetas. Obtém-se assim a fiada corrente inicial, que é uma urexpressão e que não é expurgada da redundância no caso de ser uma urexpressãoR.

b) Reescreva-se a fiada obtida no passo anterior, transformando todas as subfiadas $\{\}$ em $\{1\}$. Obtém-se assim uma fiada modificada, que passa a ser a fiada corrente, que continua a ser uma urxpressão, pois qualquer número natural pode ser visto como um urelemento. Esta fiada corrente não é expurgada da redundância no caso de ser uma urexpressãoR.

c) Se a fiada corrente for formada apenas por um par equilibrado de chavetas em cujo interior se encontra um único número, o número de Matula está encontrado, pois é esse número, terminando-se assim a aplicação deste método. Caso contrário, prossegue-se para a próxima alínea.

d) Reescreve-se a fiada corrente, substituindo todas as subfiadas "chaveta a abrir, número, chaveta a fechar" pelo primo correspondente. Ou seja, substituem-se todas as ocorrências "$\{n\}$" pelo correspondente primo "$\mathsf{P}[n]$". Obtém-se assim a nova fiada corrente, que continua a ser uma urexpressão e que, no caso de ser uma urexpressãoR, não é expurgada da redundância.

e) Reescreve-se a fiada corrente substituindo todos os números adjacentes não separados por chavetas pelo seu produto. Obtém-se assim a nova fiada corrente, que continua a ser uma urexpressão e que, no caso de ser uma urexpressãoR, não é expurgada da redundância.

f) Regressa-se ao passo c)

Para exemplo deste procedimento, considere-se a compartimentação $Cop = "\{\}\{\}\{\{\}\}"$. Aplicando os passos do procedimento atrás descrito, obtém-se:

a) $\{\{\}\{\}\{\{\}\}\}$

a) $\{\{1\}\{1\}\{\{1\}\}\}$

c) Avança-se para d)

d) $\{\ 2\ \ 2\ \{2\}\}$

e) $\{4\{2\}\}$

f) Prosseguir para c)

c) Avança-se para d)

d) $\{4\ \ 3\ \}$

e) $\{12\}$

f) Prosseguir para c)

c) Conclui-se que o número de Matula é 12.

Seja $Cop = "\{\}\{\}\{\{\}\}"$, então $\text{Matula}[Cop] = 12$

Notar que, mesmo que o conjunto estivesse expresso de uma forma equivalente, com a correspondente distinta compartimentação {}{{}}{}, a numeração de Matula viria a mesma.

Como a numeração de Matula é a mesma sse as compartimentações forem equivalentes, as diferentes formas de representar o terceiro numeral de Von Neumann, atrás referidas, como {{}{{}}{{}{{}}}}, como {{{}}{{}{{}}}{}}, ou como {{{}}{{{}}{}}{}}, têm sempre o mesmo número de Matula, que é 78.

VI.3.4 – Urisomorfismo

Como se viu, está em vigor um princípio geral de equivalência entre urelementos e símbolos. Segundo este princípio um símbolo pode ser visto como um urelemento e um urelemento pode ser visto como um símbolo.

Significa isto que um urdomínio finito é um alfabeto e consequentemente que, numa urexpressão, o símbolo que representa um urelemento pode ser visto como sendo o urelemento, pois um símbolo representa-se sempre a si próprio. Manipular um é manipular o outro.

Posto isto, considerem-se dois urdomínios, não necessariamente distintos, ^{ur}A e ^{ur}B, com a mesma urcardinalidade, $\left|{}^{ur}A\right| = \left|{}^{ur}B\right|$. Seja β uma bijecção entre estes urdomínios, $\beta\colon {}^{ur}A \to {}^{ur}B$. Esta bijecção pode ser vista de várias formas:

a) Como uma correspondência,

b) Como uma codificação,

c) Como uma transformação,

de todo e cada elemento do conjunto ^{ur}A, referido como o elemento original ou de origem, para um único e exclusivo elemento do conjunto ^{ur}B, referido como o elemento imagem ou de destino.

[DVI.62] Como a bijecção foi baptizada por β, o elemento imagem pode ser também referido como o elemento β- transformado, o elemento β- codificado, ou ainda como o elemento β-correspondente. ▲

[DVI.63] Chama-se β- transformação, ou β- codificação, ao acto de substituir um elemento pelo seu β- transformado, o seu β- codificado. ▲

[DVI.64] Um nome alternativo para a bijecção β é o de β- transformada, ou β- código, de ${}^{ur}A$ para ${}^{ur}B$, ou simplesmente β- transformada, β- código, quando tanto ${}^{ur}A$ como ${}^{ur}B$ estão convenientemente pressupostos. ▲

[DVI.65] Dois urconjuntos distintos são urisomorfos sse cumprirem a totalidade das seguintes três condições

a) As suas compartimentações são equivalentes

b) Têm a mesma urcardinalidade

c) Se a sua urcardinalidade for não nula, existe pelo menos uma bijecção entre os urdomínios que quando aplicada como codificação acarreta a igualdade dos conjuntos. ▲

Notar que as anteriores condições a) e b) asseguram que urconjuntos puros podem ser urisomorfos.

[TVI.35] Um urconjunto é sempre urisomorfo consigo próprio. ■

[EVI.49] Os conjuntos $\{ab\}$ e $\{10\}$ são urisomorfos, pois basta considerar a recodificação induzida pela bijecção $\{ab\}\rightarrow\{10\}$, $a\mapsto 1$, $b\mapsto 0$. ▼

[EVI.50] Considere-se agora uma urNR, a urNR original, que represente um conjunto A com urdomínio ${}^{ur}A$. Considere-se também como um urdomínio ${}^{ur}B$, tal que esteja definido um β- código de ${}^{ur}A$ para ${}^{ur}B$. Recodifique-se a urNR original substituindo todas as ocorrências de todos os símbolos não chaveta pelos seus β- codificados, obtendo-se assim a urNR β- codificada. Chame-se B ao conjunto definido pela urNR β- codificada. Os conjuntos A e B são urisomorfos. ▼

VI.3.5 – Pseudo - polinómio de pertença

Ludwig Wittgenstein definiu, na cláusula seis do seu notável Tractatus logico-philosophicus, (Wittgenstein-2010), os números naturais enquanto expoentes de operações. Tal definição estava relacionada com o tratamento que pretendia dar às funções de verdade, enquanto entes concretos, numa atitude anti-metafísica. Esta ideia permitia desenvolver numericamente os termos e as expressões dos fundamentos lógicos da matemática, no sentido simbólico e não filosófico, da lógica, tornando a teoria dos conjuntos subordinada ao conceito de número natural. O conceito de número natural constituía-se assim como suporte central aos

fundamentos das concepções matemáticas. Os urconjuntos não constituem excepção a tal perspectiva que, para o caso deles, assenta na numeração de Matula.

Como se viu, a numeração de Matula estabelece uma bijecção, fazendo corresponder a cada número natural uma classe de equivalência das compartimentações. Para determinar se dois urconjuntos puros são ou não o mesmo, basta comparar os seus números de Matula.

No entanto, existem urconjuntos que não são puros. É, no entanto, possível reformular o algoritmo de tal modo que seja possível estabelecer uma expressão, de índole pseudo polinomial, de tal forma que a igualdade das expressões só ocorra quando os urconjuntos sejam urisomorfos. Esta reformulação, tanto quanto sabemos, não se encontra descrita na literatura.

Para começar, considere-se que o símbolo de pertença, $\in$, pode ser afectado por números naturais. Esses números naturais podem afectá-lo, quer sob a forma de **factores multiplicativos**, tal como em $3\in$, quer sob a forma de **expoentes**, tal como em $\in^5$, podendo até estarem em simultâneo presentes as duas formas de afectação, como em $3\in^5$. Considere-se também que seja válido utilizar uma variante vertical do sinal mais, †, de cariz comutativo, para reunir na mesma expressão vários destes símbolos de pertença afectados por inteiros, como $3\in^5 † 4\in^{12}$. Esta última expressão exemplifica aquilo que se considera ser um pseudo polinómio de pertença, pois embora pareça um polinómio, o símbolo $\in$ não é entendido, nem como uma variável, nem como uma incógnita, nem sequer como um elemento de um corpo algébrico. Deve ser entendido apenas como um símbolo que pode participar em expressões cuja interpretação esteja bem definida.

[DVI.66] O **pseudo polinómio de pertença** é também referível por **ppp.** ▲

Convenciona-se que, num ppp, todas as ocorrências do símbolo de pertença estão afectadas, quer por um expoente, quer por um factor multiplicativo. Por isso, relativamente ao expoente, estipula-se que num pseudo polinómio $\in \Leftrightarrow \in^1$. Considera-se também que a informação de contexto permite sempre distinguir adequadamente entre o $\in$ enquanto interveniente num ppp, equivalente a $\in^1$, do $\in$ enquanto interveniente numa afirmação de pertença, que surge sem expoente, $\in^{\hat{\varnothing}}$, em expressões como $x \in X$, com a habitual leitura de "pertence a". Note-se adicionalmente que expressões com $\in^{\hat{\varnothing}}$ são válidas para quaisquer

conjuntos, enquanto que expressões com $\in^1$ só são válidas em ppp, que por sua vez só podem descrever urconjuntos.

As afectações por factores multiplicativos também admitem a habitual convenção de que o um é de representação dispensável, de que $1\in^n \Leftrightarrow \in^n$. Isto permite aceitar a prática usual de que, para quaisquer números naturais a, b e n, se admite como válida a equivalência $a\in^n \dagger b\in^n \Leftrightarrow (a+b)\in^n$. Por não existir perigo de má interpretação, a expressão dos ppp será muitas vezes escrita omitindo a variante vertical no sinal mais. Assim, equivalência anterior viria expressa por $a\in^n + b\in^n \Leftrightarrow (a+b)\in^n$, pese embora o facto de que o símbolo '+', sendo sempre comutativo, só no lado direito da equivalência é que representa a soma aritmética. Desta forma, admite-se que as expressões $\in \dagger \in = 2\in$, e $3\in^2 \dagger \in^2 \dagger \in = \in \dagger 4\in^2$, podem ser reescritas como $\in + \in = 2\in$, e $3\in^2 + \in^2 + \in = \in + 4\in^2$.

[DVI.67] Chama-se termo polinomial, ou simplesmente **termo**, de um ppp a uma expressão do tipo $n\in^m$, onde $n, m \in \mathbb{N}$. ▲

[nDVI.08] Não fica definido o que representa $n\in^m$ quando $(n \notin \mathbb{N}) \vee (m \notin \mathbb{N})$. ▲

[EVI.51] Não está definido o que representa a expressão $\in^0$. ▼

[EVI.52] Não está definido o que representa a expressão $0\in$. ▼

[DVI.68] Num ppp, os termos polinomiais podem ser singulares, quando o factor multiplicativo é um, ou plurais, quando o factor multiplicativo é superior a um. ▲

[DVI.69] Chama-se **pluralidade de um ppp** à soma aritmética dos factores multiplicativos de todos os seus termos. ▲

[EVI.53] O ppp $\in + 4\in^2$ tem pluralidade cinco e o ppp $\in + \in$ tem pluralidade dois. ▼

A regra geral, para estabelecer a correspondência entre as urNR e pseudo polinómios de pertença, consiste no seguinte procedimento:

a) Determine-se o número de Matula para a compartimentação da urNR em análise. Obtém-se assim o primeiro termo do ppp.

b) Se a urNR não possuir urelementos está determinado o ppp e termina-se.

c) Se a UrNR possuir urlementos, por cada um, procede-se do modo descrito de d) até g), obtendo-se assim mais um termo singular para o ppp por cada urelemento.

d) Escolhe-se um urelemento que ainda não tenha sido escolhido e substituem-se na urNR todas as suas ocorrências pelo singletão vazio, $\{\{\}\}$ e as ocorrências de todos os outros urelementos por conjuntos vazios, $\{\}$. Determina-se o número de Matula da compartimentação Cop desta nova urNR, $\text{Matula}[Cop]$, que passa a ser o expoente do novo termo singular no ppp.

e) Se no ppp existirem dois termos com o mesmo expoente, procede-se à soma aritmética dos seus factores multiplicativos, resultando num único termo plural.

f) Se já tiverem sido escolhidos todos os urelementos, o ppp está encontrado e termina-se.

g) Regressa-se a d.

Notar que, num ppp, o termo de menor expoente é sempre singular e representa sempre a compartimentação.

[DVI.70] Num ppp, o expoente de um termo também pode ser chamado ordem ou **grau** desse termo. ▲

[DVI.71] Chama-se termo estrutural de um ppp ou simplesmente **termo estrutural** ao termo de menor grau de um ppp. ▲

[TVI.36] O termo estrutural é sempre singular. ■

[EVI.54] Considere-se o conjunto $\{\{ab\}\{ac\}\}$. Como o seu urdomínio tem três elementos, o seu ppp terá quatro contribuições pelo que será de pluralidade quatro.

Primeira contribuição - $Cop = \text{"}\{\}\{\}\text{"}$, tendo-se que $\in^{\text{Matula}[\text{"}\{\}\{\}\text{"}]} = \in^{4}$

Segunda contribuição - urelemento a, tendo-se que $\in^{\text{Matula}[\text{"}\{\{\{\}\}\{\}\}\ \{\{\{\}\}\{\}\}\text{"}]} = \in^{169}$

Terceira contribuição - urelemento b, tendo-se que $\in^{\text{Matula}[\text{"}\{\{\}\{\{\}\}\}\ \{\{\}\{\}\}\text{"}]} = \in^{91}$

Quarta contribuição - urelemento c, tendo-se que $\in^{\text{Matula}[\text{"}\{\{\}\{\}\}\ \{\{\}\{\{\}\}\}\text{"}]} = \in^{91}$

O ppp será $\in^{4} + 2\in^{91} + \in^{169}$. ▼

[EVI.55] Considere-se agora o conjunto $\{\{ab\}\{bc\}\}$. Como o seu urdomínio tem três elementos, o seu ppp terá quatro contribuições, pelo que será de pluralidade quatro.

Primeira contribuição - $Cop = \text{"}\{\}\{\}\text{"}$, tendo-se que $\in^{\text{Matula}[\text{"}\{\}\{\}\text{"}]} = \in^{4}$

Segunda contribuição - urelemento a, tendo-se que $\in^{\text{Matula}[\text{"}\{\{\}\{\{\}\}\}\ \{\{\}\{\}\}\text{"}]} = \in^{91}$

Terceira contribuição - urelemento b, tendo-se que $\in^{\text{Matula}["\{\{\ \}\{\{\ \}\}\}\ \{\{\{\ \}\}\{\ \}\}"]}=\in^{169}$

Quarta contribuição - urelemento c, tendo-se que $\in^{\text{Matula}["\{\{\ \}\{\ \}\}\ \{\{\ \}\{\{\ \}\}\}"]}=\in^{91}$

O ppp será $\in^4 + 2\in^{91} + \in^{169}$, pelo que os conjuntos $\{\{ab\}\{bc\}\}$ e $\{\{ab\}\{ac\}\}$ não são iguais mas são urisomorfos. ▼

Notar como o termo de menor grau representa a compartimentação e como os outros representam a localização dos urelementos dentro da compartimentação.

Notar também que:

[TVI.37] A pluralidade do ppp é sempre $1+\left|{}^{ur}A\right|$. ■

Se em lugar dos urelementos a e b, estivesse 0 e 1, o ppp seria o mesmo. O ppp não depende da codificação particular dos urelementos.

[EVI.56] Os conjuntos $\{\{a\}\{b\}\{a\{ab\}\}\}$ e $\{\{c\}\{a\}\{c\{ca\}\}\}$ não são iguais, mas são urisomorfos, pois têm o mesmo ppp como pode ser verificado. ▼

VI.4 - Súmula

Foram assim desenvolvidos os conceitos de urconjunto e de ppp, que irão permitir definir o conceito de dupla ordenada com tolerância e avançar para a definição dos tuplos tolerantes e das suas propriedades.

VII – Tuplos

Vai ser agora elaborada a conceptualização de um padrão de urconjuntos que permite lidar com a sequenciação tolerante dos urelementos.

VII.1 – Duplos, duplas

No que se segue é considerado equivalente referir qualquer uma das formas: “duplo” ou “dupla”. Uma dupla é sempre uma dupla ordenada, pelo que é uma redundância falar de dupla ordenada.

[DVII.01] Chama-se dupla com as componentes não nulas e distintas, ou dupla em sentido estrito, ou simplesmente **dupla estrita**, a qualquer urconjunto cujo ppp seja $\in^2 + \in^9 + \in^{10}$. ▲

[EVII.01] O ppp de $\{\{a\}b\}$ é $\in^2 + \in^9 + \in^{10}$. ▼

[DVII.02] Chama-se dupla com as componentes não nulas e iguais, ou simplesmente **dupla com as componentes iguais**, a qualquer urconjunto cujo ppp seja $\in^2 + \in^{15}$. ▲

[EVII.02] O ppp de $\{\{a\}a\}$ é $\in^2 + \in^{15}$. ▼

Considerando, relativamente à compartimentação presente, a serialização das componentes como sendo efectuada de dentro para fora, vem:

[DVII.03] Chama-se dupla com apenas a primeira componente nula, ou simplesmente **dupla com a primeira componente nula**, a qualquer urconjunto cujo ppp seja $\in^2 + \in^6$. ▲

[EVII.03] O ppp de $\{\{\}a\}$ é $\in^2 + \in^6$. ▼

Significa isto que a primeira componente é a mais interior de todas.

[DVII.04] Chama-se dupla com apenas a segunda componente nula, ou simplesmente **dupla com a segunda componente nula**, a qualquer urconjunto cujo ppp seja $\in^2 + \in^5$. ▲

[EVII.04] O ppp de $\{\{a\}\}$ é $\in^2 + \in^5$. ▼

[DVII.05] Chama-se dupla duplamente nula, ou simplesmente **dupla nula**, ao urconjunto cujo ppp seja $\in^2$, o singletão vazio. ▲

[EVII.05] O ppp de $\{\{\,\}\}$ é $\in^2$. ▼

Qualquer dupla é uma dupla em sentido lato, mas só aquelas que têm ppp igual a $\in^2 + \in^9 + \in^{10}$ é que são duplas em sentido estrito. Considera-se pois que uma dupla em sentido estrito também o é em sentido lato.

Obtêm-se assim a seguinte lista:

Nome simples para as duplas	ppp
$\{\{a\}b\}$ *dupla estrita*	$\in^2 + \in^9 + \in^{10}$
$\{\{a\}a\}$ *dupla com as componentes iguais*	$\in^2 + \in^{15}$
$\{\{\,\}a\}$ *dupla com a primeira componente nula*	$\in^2 + \in^6$
$\{\{a\}\}$ *dupla com a segunda componente nula*	$\in^2 + \in^5$
$\{\{\,\}\}$ *dupla nula*	$\in^2$

É patente que, numa dupla, o termo estrutural do ppp é sempre $\in^2$. A seguinte definição reveste-se de interesse prático.

[DVII.06] Numa dupla estrita, o urlemento relativo a $\in^{10}$ é chamado de **primeira componente** e o urelemento relativo a $\in^9$ é chamado de **segunda componente**.



Como visto, ao considerar duplas em sentido lato, é possível considerar duplas para além das duplas estritas. Todas estas duplas podem ser chamadas de duplas tolerantes, no sentido de tolerantes a falhas, visto que continuam a ser consideradas duplas mesmo quando falha a presença de pelo menos um dos urlementos. Do ponto de vista da pluralidade, existem três casos de duplas não estritas, todos eles com pluralidade abaixo de três. A pluralidade de uma dupla é três, dois, ou mesmo um, conforme tenha as componentes distintas, iguais ou falhe a presença de uma componente, ou falhe mesmo a presença de ambas.

Relembre-se que, de acordo com as definições [DVI.32-34], uma componente presente é um urelemento e que uma componente ausente é nada, $\hat{\varnothing}$. Um urelemento nunca pode ser $\hat{\varnothing}$, mas uma componente já pode ser $\hat{\varnothing}$.

[EVII.06] Notar que, qualquer ppp cujo termo estrutural seja $\in^2$ e cuja pluralidade seja no máximo 3, não tem necessariamente de corresponder a uma dupla, como são os casos de $\{a\{ab\}\}$ cujo ppp é $\in^2 + \in^{26} + \in^{39}$, de $\{ab\{a\}\}$ cujo ppp é $\in^2 + \in^{18} + \in^{30}$, de $\{ab\{ab\}\}$ cujo ppp é $\in^2 + 2\in^{78}$, de $\{ab\{\}\}$ cujo ppp é $\in^2 + 2\in^{12}$ e de $\{\{ab\}\}$ cujo ppp é $\in^2 + 2\in^{13}$. ▼

Usando vincadamente a vírgula, ',', como separador auxiliar, é possível elaborar as seguintes definições, em que se usam parêntesis rectos para não confundir com a tradicional notação referente a pares ordenados, (a,b).

[DVII.07] Uma dupla estrita, $\{\{a\}b\}$ ou $\{b\{a\}\}$, pode ser representada por $[a,b]$. Uma dupla estrita, $\{\{b\}a\}$ ou $\{a\{b\}\}$, pode ser representada por $[b,a]$. ▲

[DVII.08] Uma dupla com as componentes nãu nulas e iguais, $\{\{a\}a\}$ ou $\{a\{a\}\}$, pode ser representada por $[a,a]$. ▲

[DVII.09] Uma dupla com a primeira componente nula, $\{\{\}a\}$ ou $\{a\{\}\}$, pode ser representada por $[\,,a]$ ou por $[\hat{\varnothing},a]$. ▲

[DVII.10] Uma dupla com a segunda componente nula, $\{\{a\}\}$, pode ser representada por $[a,\,]$ ou por $[a,\hat{\varnothing}]$. ▲

[DVII.11] Uma dupla nula, $\{\{\}\}$, pode ser representada por $[\,,\,]$ ou por $[\hat{\varnothing},\hat{\varnothing}]$. ▲

VII.2 – Tuplos

Como visto, um duplo (ou dupla) tem duas componentes. Vai ser agora elaborada a generalização do conceito de duplo para um número geral $n \in \mathbb{N}$ de componentes, um n-tuplo, onde uma, algumas ou mesmo todas essas componentes poderão ser eventualmente nulas. Como é sabido, tais entidades conceptuais são referidas por qualquer uma das seguintes formas simplificadas equivalentes: “tuplo” ou “tupla”. Um tuplo é sempre um tuplo ordenado, pelo que é uma redundância falar de tuplo ordenado.

Esta generalização do conceito de tuplo vai ter por base o ppp, pelo que é conveniente começar por tecer algumas considerações sobre as sequências de números primos.

VII.2.1 - Sobre a construção de sequências de números primos

Como se viu, $\mathsf{P}\left[k\right], k \in \mathbb{N}_0$ representa o k-ésimo primo.

[DVII.12] A notação $\mathsf{P}^n\left[1\right]$ representa $\overbrace{\mathsf{P}[\mathsf{P}[\cdots\mathsf{P}}^{n}[1]\cdots]]$, com $n \in \mathbb{N}_0$. ▲

Notar que o expoente n representa o número de repetições da aplicação de $\mathsf{P}[\ ]$ ao número k. Se o expoente for nulo, isso significa que não foi aplicado, pelo que o número se mantém inalterado. Nesta ordem de ideias:

[DVII.13] A notação $\mathsf{P}^0\left[1\right]$ representa 1. ▲

[EVII.07] Vem assim que $\mathsf{P}\left[1\right]=2$, $\mathsf{P}^2\left[1\right]=\mathsf{P}\left[\mathsf{P}\left[1\right]\right]=\mathsf{P}\left[2\right]=3$, $\mathsf{P}^3\left[1\right]=5$,

$\mathsf{P}^4\left[1\right]=\mathsf{P}\left[\mathsf{P}\left[\mathsf{P}\left[\mathsf{P}\left[1\right]\right]\right]\right]=11$, $\mathsf{P}^5\left[1\right]=31$, ... ▼

Esta sequência, $1, 2, 3, 5, 11, 31, 127, 709, \cdots$ é bem conhecida e tem matrícula A007097 na OEIS™. Notar que os índices desta sequência são os elementos de $\mathbb{N}_0$, devidamente ordenados, de tal forma que a sequência cumpre a convenção $\mathsf{P}^0\left[1\right]=1$. Desta forma o 0-ésimo número primo é o um, e o primeiro é o dois.

A sequência $\mathsf{P}^n\left[1\right]$ tem como "semente" fundadora o número um, 1, pois começa em $\mathsf{P}^0\left[1\right]=1$. Uma questão que se pode colocar é: O que acontece se a "semente" fundadora for um outro número natural ou nulo, em termos gerais um $k \in \mathbb{N}_0$?

Convenciona-se que:

[DVII.14] $\mathsf{P}^0\left[k\right]=k, \forall k \in \mathbb{N}_0$. ▲

Então virá que o 0-ésimo termo da sequência será $\mathsf{P}^0\left[k\right]=k$. E ter-se-á que $\mathsf{P}^n\left[k\right]$ representará $\overbrace{\mathsf{P}[\mathsf{P}[\cdots\mathsf{P}}^{n}[k]\cdots]]$.

E vem que:

[TVII.01] $\mathsf{P}^n\left[\mathsf{P}^m\left[k\right]\right]=\mathsf{P}^{n+m}\left[k\right], \forall n,m \in \mathbb{N}_0$

P: Por indução em n e m. ■

Se k for um dos termos de $\mathsf{A007097}$, então existirá um único $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $k = \mathsf{P}^N[1]$, pelo que $\mathsf{P}^n[k] = \mathsf{P}^{N+n}[1]$.

Além disso, convenciona-se a seguinte involução:

[DVII.15] $\mathsf{P}^n[0] = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$. ▲

[SVII.01] Um convenção alternativa seria a de considerar $\mathsf{P}[0] = 1$. No entanto tal convenção anularia a propriedade involutiva que a definição [DVII.15] atribui ao zero. ♦

[SVII.02] Se k não for um dos termos de $\mathsf{A007097}$, é preciso considerar a sequência das “sementes” 0, 1,4, 6, 8, 9,10, 12, ..., cuja matrícula é $\mathsf{A141468}$, tendo-se que:

[TVII.02] Todo e qualquer elemento não nulo de $\mathsf{A141468}$ origina uma sequência de primos única. ■

[TVII.03] Todos os primos têm uma única “semente” em $\mathsf{A141468}$, ou seja, todos os primos pertencem a uma e uma só sequência de termo geral $\mathsf{P}^n[k]$, onde k é um termo, não nulo, de $\mathsf{A141468}$. ■

♦

Sendo assim, é possível considerar que quando $k = 1$ a sua representação é escusada. Surge assim a seguinte convenção de escrita simplificada:

[DVII.16] Convenciona-se que $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}^n[1]$. ▲

VII.2.2 - Representação de n-tuplos

Como visto, um termo estrutural $\in^{\mathsf{P}^{(n-1)}[1]}$ pode ser convenientemente escrito como $\in^{\mathsf{P}^{(n-1)}}$. Assim:

[DVII.17] A condição necessária para que um urconjunto possa representar um n-tuplo, é que o seu ppp tenha $\in^{\mathsf{P}^{(n-1)}}$ como termo estrutural e que a pluralidade seja no máximo $n+1$. ▲

No entanto esta condição não é suficiente, pois $\{ab\{\}\}$, que tem $\in^2 + 2\in^{12}$ como ppp, cumpre a condição necessária mas não é uma dupla.

[DVII.18] Um n-tuplo também pode ser referido como um tuplo de **ordem** n. ▲

Notar que se preferiu seguir a prática comum, em que a palavra «ordem» está sobre-utilizada. Assim, «ordem» enquanto "ordem de um tuplo" não deverá ser confundida com «ordem» enquanto "ordem de um termo num ppp".

[SVII.03] Constitui um problema em aberto o determinar a condição suficiente para que um dado ppp, que cumpra a condição necessária, seja um tuplo. ♦

Considera-se que, se um urconjunto é tuplo, então é-o em sentido lato ou tolerante, sendo necessário afirmar que é em sentido estrito quando se pretender salientar tal facto. Qualquer tuplo em sentido estrito também é tuplo em sentido lato, mas nem todos os tuplos em sentido lato o são em sentido estrito.

[DVII.19] $\{\}$ é um 1-tuplo. Mais concretamente é o 1-tuplo vazio. ▲

[DVII.20] Qualquer conjunto ursingular é um tuplo em sentido estrito. Mais concretamente é um 1-tuplo estrito. ▲

[DVII.21] Uma dupla é um 2-tuplo. ▲

[nDVII.01] Não fica definido o que é o 0-tuplo. ▲

[SVII.04] Notar que o facto de $\{\}$ ser um 1-tuplo é imposto pela definição baseada no termo estrutural. A intuição poderia sugerir que o 0-tuplo seria $\hat{\varnothing}$, ou seja, que o 0-tuplo seria a ausência de tuplo. Ora, dessa forma, não seria um urconjunto e portanto careceria de definição de termo estrutural. Sendo assim, é considerado que a ausência de tuplo não é um tuplo, da mesma forma que a ausência de conjunto não é um conjunto ou que a ausência de número não é um número. O bem conhecido facto de a ausência de número não ser um número obriga a que, em linguagens como o SQL, seja necessário definir e utilizar funções, como `Null2Zero()`, que procedem à transformação da ausência para o número zero. ♦

Os seguintes teoremas permitem considerar tuplos de qualquer ordem.

[TVII.04] É um n-tuplo qualquer singletão cujo elemento seja um (n-1)-tuplo. ■

[TVII.05] É um n-tuplo qualquer urconjunto de cardinalidade dois, em que um dos elementos seja um urelemento e o outro elemento seja um (n-1)-tuplo. ■

[TVII.06] É um n-tuplo em sentido estrito qualquer urconjunto de cardinalidade dois, em que um dos elementos seja um urelemento e o outro elemento seja um (n-1)-tuplo em sentido estrito. ■

Ficam assim considerados como adquiridos os conceitos de dupla ordenada, representado por $[a,b]$, de terno ordenado, $[a,b,c]$, e assim por aí em diante, sob o nome genérico de *n*-plos ordenados, ou tuplos, ou registos.

Os tuplos são preferencialmente representados por letras minúsculas a negrito, latinas ou gregas, tais como $\mathbf{x}$ ou $\boldsymbol{\tau}$. Como visto, nos tuplos existem componentes. Intuitivamente, as componentes podem ser vistas como os urelementos que preenchem estruturas sequenciais, específicas e determinadas, que podem ser chamadas campos. Contrariamente ao que se passa num conjunto genérico, em que não é possível falar de primeiro elemento, segundo elemento, …, *i*-ésimo elemento, …, *n*-ésimo elemento, é possível no caso dos tuplos falar de primeira componente, segunda componente, …, *i*-ésima componente, …, *n*-ésima componente.

VII.2.3 - Normas relativas a tuplos

É conveniente introduzir as seguintes convenções terminológicas:

[DVII.22] A locução «não tolerante» admite **NTT** como sigla e a locução «tolerante» admite **TT** como sigla. ▲

Estas convenções terminológicas serão doravante utilizadas. Além disso, em termos de expressão gráfica das expressões simbólico-algébricas, é possível considerar um preceito guia. Afirma esse preceito guia que a titulação do símbolo de uma a entidade qualquer que lide com componentes, por um parêntesis curvo cuja concavidade aponta para cima e que consequentemente o extremo aponta para baixo, '$\smile$', indicará que esse símbolo deverá ser entendido de forma NTT, não se considerando a possibilidade de componentes ausentes, enquanto que a titulação por um parêntesis curvo cuja concavidade aponte para baixo e que portanto o extremo aponte para cima, '$\frown$', indicará que esse símbolo deverá ser entendido de forma TT, podendo-se ter de lidar com as componenes ausentes. Finalmente, afirma também que a titulação por '$\circ$' indicará que estamos, num caso TT, a considerar apenas os ausentes e desprezamos os presentes, enquanto que a titulação por '$\bullet$' indicará que estamos, num caso TT, a considerar apenas os presentes e desprezamos os ausentes.

É possível elaborar a seguinte definição

[DVII.23] Para tuplos NTT, chama-se **comprimento** à ordem do tuplo $\mathbf{x}$, ao número natural, $\breve{\#}\mathbf{x} \in \mathbb{N}$, que indica quantos componentes tem o tuplo. ▲

Esta notação $\breve{\#}\mathbf{x}$ não deve ser simplificada para $\#\mathbf{x}$, pois pode haver perigo de confusão com a cardinalidade de um conjunto e um tuplo é um conjunto de cardinalidade, no máximo, dois.

Para tuplos TT a definição correspondente, $\hat{\#}\mathbf{x}$, é menos directa. Uma forma de o fazer, baseada nos números complexos, é intuir o número $\hat{\#}\mathbf{x}$ como um tuplo tolerante, como uma dupla de elementos de $\mathbb{N}_0$, como um número não simples, como um número com duas componentes, $\hat{\#}\mathbf{x} = \left[\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x}, \overset{\circ}{\#}\mathbf{x}\right]$, onde a primeira componente corresponderia ao número de componentes realmente presentes em $\mathbf{x}$, o preenchimento, e a segunda ao número de componentes provagos, ausentes, não realmente presentes.

[DVII.24] O número de componentes presentes num tuplo TT, $\mathbf{x}$, é $\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x}$, e é chamado de **preenchimento**, comprimento real ou simplesmente comprimento. ▲

[DVII.25] O número de componentes ausentes num tuplo TT, $\mathbf{x}$, é $\overset{\circ}{\#}\mathbf{x}$ e é chamado de **provago**, não preenchimento, ou comprimento imaginário. ▲

Os tuplos NTT podem no entanto ser vistos como casos particulares de tuplos TT em que $\overset{\circ}{\#}\mathbf{x} = 0$. Informalmente $\overset{\circ}{\#}\mathbf{x}$ representa o número de componentes nulas num tuplo. Para tuplos TT $\overset{\circ}{\#}\mathbf{x} \in \mathbb{N}_0$, pois qualquer tuplo NTT também é TT. Para tuplos TT, $\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x} \in \mathbb{N}_0$. Para tuplos NTT, $\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x} \in \mathbb{N}$. O n-tuplo nulo é TT, sem ser NTT. Pode dizer-se que tuplos NTT são aqueles tuplos TT em que o número de componentes ausentes, $\overset{\circ}{\#}$, é zero.

[TVII.07] Tem-se que em qualquer tuplo NTT, $\breve{\#}\mathbf{x} = \overset{\bullet}{\#}$.

P Directamente a partir das definições. ■

[DVII.26] Para um tuplo qualquer, $\mathbf{x}$, chama-se balanço TT ou simplesmente **balanço**, $\hat{\#}\mathbf{x}$, ao tuplo $\hat{\#}\mathbf{x} = \left[\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x}, \overset{\circ}{\#}\mathbf{x}\right]$. ▲

[SVII.05] Foi escolhida a palavra «balanço» porque intuitivamente admite várias dimensões de apreciação. Foi considerado que termos alternativos como «extensão» poderiam induzir mais sugestivamente ao reducionismo unidimensional. ♦

[DVII.27] Num balanço TT, por analogia com os elementos de $\mathbb{C}$, a primeira componente pode ser chamada de componente real, e a outra de imaginária.

[DVII.28] O valor absoluto do número de componentes, ou capacidade, ou **lotação** de um tuplo TT, $\left|\hat{\#}\mathbf{x}\right|$, é um número natural tal que: $\left|\hat{\#}\mathbf{x}\right| = \overset{\bullet}{\#}\mathbf{x} + \overset{\circ}{\#}\mathbf{x}$, a sua ordem. ▲

Notar que um *n*-tuplo é um tuplo de lotação n.

No sentido exposto, «ordem de um tuplo» e «lotação de um tuplo» são sinónimos, cujo interesse é prático, da mesma forma que "ordem de um termo num ppp" e "grau de um termo num ppp" são sinónimos.

[nDVII.02] Não fica definido o que se entende por «valor absoluto de um tuplo».

[DVII.29] A norma quadrática, ou norma-2, ou **magnitude**, do número de componentes de um tuplo TT, $\left\|\hat{\#}\mathbf{x}\right\|_{\|2\|}$, é um número real positivo tal que:

$$\left\|\hat{\#}\mathbf{x}\right\|_{\|2\|} = \left\|\hat{\#}\mathbf{x}\right\| = \sqrt[2]{\left(\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x}\right)^2 + \left(\overset{\circ}{\#}\mathbf{x}\right)^2} .$$ ▲

[DVII.30] A norma-n do número de componentes de um tuplo TT, $\left\|\hat{\#}\mathbf{x}\right\|_{\|n\|}$, onde $n \in \mathbb{N}$, é um número real positivo tal que: $\left\|\hat{\#}\mathbf{x}\right\|_{\|n\|} = \sqrt[n]{\left(\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x}\right)^n + \left(\overset{\circ}{\#}\mathbf{x}\right)^n}$. ▲

[TVII.08] Tem-se que a norma-1 é a lotação de um tuplo TT, a sua ordem, ou seja: $\left|\hat{\#}\mathbf{x}\right| = \left\|\hat{\#}\mathbf{x}\right\|_{\|1\|}$.

P Directamente a partir das definições. ■

Assim $\hat{\#}\{\,\} = [0,1]$, sendo zero o seu comprimento real, dos presentes, o seu preenchimento e um o comprimento imaginário, dos ausentes, o seu provago. Tem-se que se $\hat{\#}\mathbf{x} = [n,m]$, então $\overset{\bullet}{\#} = n$ e $\overset{\circ}{\#}\mathbf{x} = m$.

[DVII.31] Dado um tuplo NTT $\mathbf{x}$, representar-se-á por x_i a sua *i*-ésima componente, tendo-se que *i* é um número natural tal que: $1 \leq i \leq \breve{\#}\mathbf{x}$. ▲

Visto ser um conjunto, o tuplo unitário $\mathbf{x} = [x]$ é considerado distinto do seu único componente, x, tendo-se pois $\mathbf{x} \neq x$.

[SVII.06] Como visto, $\hat{\#}\mathbf{x} = [n, m]$ onde $n, m \in \mathbb{N}_0$, mas tem que se ter que $|\hat{\#}\mathbf{x}| > 0$. Isto quer dizer que $n + m > 0$, ou seja que não podem ser os dois simultaneamente nulos. Se ambos fossem simultaneamente nulos, tal obrigaria à existência de um 0-tuplo, que não foi definido. Esta problemática reaparecerá quando se pretender tratar a concatenação de tuplos como distinta da concatenação de fiadas. Qualquer tuplo $\mathbf{s}$ poderá ser visto como uma fiada de comprimento $\overset{\bullet}{\#}s$. Qualquer tuplo em que $|\hat{\#}\mathbf{s}| = \overset{\circ}{\#}\mathbf{s}$ será visto como uma fiada nula, pois $\overset{\bullet}{\#}s = 0$. O 0-tuplo, não definido mas intuído como $\hat{\varnothing}$, seria o elemento neutro da concatenação de tuplos. ♦

VII.2.4 - Concatenação de tuplos

A concatenação de tuplos permite obter um tuplo a partir de dois. O símbolo que a representa é $\hat{+\!\!\|}$, ou simplesmente $+\!\!\|$.

[DVII.32] A **concatenação** de dois tuplos, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2, ..., y_m]$, representada por $\mathbf{w} = \mathbf{x} +\!\!\| \mathbf{y}$ é o tuplo $\mathbf{w} = [x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m]$. ▲

De acordo com esta definição, $w_1 \hat{=} x_1$, $w_{n+1} \hat{=} y_1$, $w_{n+m} \hat{=} y_m$.

[SVII.07] É posível definir uma concatenação $\|\!\!+$, tal que $\mathbf{w} = \mathbf{x} +\!\!\| \mathbf{y} = \mathbf{y} \|\!\!+ \mathbf{x}$. ♦

VII.3 - Projecções

Pela projecção, a partir de um tuplo obtém-se: ou um urelemento ou um tuplo.

[DVII.33] Define-se a **projecção simples NTT**, $x_i = \breve{\pi}_i(\mathbf{x})$, como o meio de, dado o tuplo NTT $\mathbf{x}$, obter o urelemento x_i, constituinte da *i*-ésima componente de $\mathbf{x}$, onde o número i é um natural tal que $1 \le i \le \breve{\#}\mathbf{x}$. ▲

Convém definir projecção para um tuplo de índices, pois i é formalmente distinto do tuplo $[i]$.

[DVII.34] Define-se a **projecção NTT**, $\mathbf{x}_{[i]} = \breve{\pi}_{[i]}(\mathbf{x})$, como o meio de, dado o tuplo NTT $\mathbf{x}$, obter o tuplo $\mathbf{x}_{[i]} = [x_i]$, onde a primeira e única componente de $\mathbf{x}_{[i]}$ é a *i*-ésima componente de $\mathbf{x}$, e onde o número i é um natural tal que $1 \leq i \leq \breve{\#}\mathbf{x}$. ▲

Além disso, tem-s que:

[DVII.35] Tem-se que, $\mathbf{x}_{[i,j]} = \breve{\pi}_{[i,j]}(\mathbf{x})$, onde $\breve{\pi}_{[i,j]}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{[i]} \breve{+\!\!|} \mathbf{x}_{[j]}$. ▲

Por aplicação iterada da definição anterior é possível definir projecção para qualquer tuplo NTT de índices válidos, isto é, de índices entre um e $\breve{\#}\mathbf{x}$ inclusivé, mesmo com repetições.

Trate-se agora do caso tolerante.

[DVII.36] Define-se a projecção simples TT, $x_i \hat{=} \hat{\pi}_i(\mathbf{x})$, ou **projecção simples**, como o meio de, dado o tuplo TT $\mathbf{x}$, obter o amontoado x_i, amontoado esse ou nulo ou constituído no máximo por um urelemento e que constitui a *i*-ésima componente de $\mathbf{x}$, onde o número i é um natural tal que $1 \leq i \leq \left|\hat{\#}\mathbf{x}\right|$. ▲

[DVII.37] Define-se a projecção TT, $\mathbf{x}_{[i]} = \hat{\pi}_{[i]}(\mathbf{x})$, ou simplesmente **projecção,** como o meio de, dado o tuplo TT $\mathbf{x}$, obter o tuplo $\mathbf{x}_{[i]} = [x_i]$, onde a primeira e única componente de $\mathbf{x}_{[i]}$ é a *i*-ésima componente de $\mathbf{x}$, e onde o número i é um natural tal que $1 \leq i \leq \left|\hat{\#}\mathbf{x}\right|$. ▲

Fica assim feita a distinção entre projecção simples e projecção, pois $i \neq [i]$ embora se tenha que $[x_i] = \mathbf{x}_{[i]}$.

[DVII.38] Tem-se que, $\mathbf{x}_{[i,j]} = \hat{\pi}_{[i,j]}(\mathbf{x})$, onde $\hat{\pi}_{[i,j]}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{[i]} \hat{+\!\!|} \mathbf{x}_{[j]}$. ▲

Por aplicação iterada da definição anterior é possível definir projecção para qualquer tuplo TT de índices válidos, isto é, de índices entre um e $\left|\hat{\#}x\right|$, mesmo com repetições.

[nDVII.03] Não fica definido o que se entende por $\hat{\pi}_{i,j}(\mathbf{x})$ nem por $\breve{\pi}_{i,j}(\mathbf{x})$. ▲

VII.4 - Súmula

Foi assim desenvolvido o conceito de dupla tolerante e de tuplo tolerante, que irá permitir definir o conceito de produto cartesiano com tolerância e avançar para a definição das operações tolerantes e de outras estruturas algébricas incorporando a possibilidade de tolerância.

VIII - Das relações aos sinais

Sobre o conceito de símbolo, tal como descrito em «III.1.1 - Cognição e símbolos», importa recordar que é primitivo, simples e elementar. Concomitantemente, a discriminação entre símbolos, o facto de se poderem apreender símbolos distintos, também tem de ser considerado da mesma forma. Símbolos distintos, em qualquer acepção, são forçosamente separados por transições intersimbólicas, que materializam a transformação de um símbolo noutro. O mesmo acontece com as expressões simbólicas e as suas transformações.

Saliente-se que aquilo que determinadas entidades computacionais vêem como transições, outras podem ver como símbolos, e reciprocamente. Ser símbolo, ser transição, depende do ponto de vista do interpretador semiótico. Tão fundamentais como os símbolos surgem assim as transformações de símbolos noutros, ou de expressões simbólicas noutras.

É este aspecto que vai aqui começar a ser discutido.

VIII.1 - Correspondências

[DVIII.01] Diz-se que uma dupla está estabelecida de forma TT, ou simplesmente **estabelecida**, entre dois urdomínios, não necessariamente distintos, identificados como o primeiro urdomínio e o segundo urdomínio, se a sua primeira componente, quando presente, for também elemento do primeiro urdomínio, e se a sua segunda componente, quando presente, for também elemento do segundo. ▲

Posto isto, considerem-se dois urdomínios não necessariamente distintos: $\mathbb{U}$, identificado como o primeiro urdomínio e $\mathbb{V}$, identificado como o segundo urdomínio.

[DVIII.02] Chama-se evento ou acto de correspondência entre elementos de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, ou simplesmente **acto de correspondência** entre $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ a qualquer dupla estabelecida entre os urdomínios $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, por esta ordem. ▲

De acordo com a definição anterior, é possível concluir que:

[TVIII.01] Qualquer dupla $\boldsymbol{\tau}$ pode ser vista como um caso de correspondência entre elementos de ${}^{ur}\boldsymbol{\tau}$. ■

Além disso vem que:

[DVIII.03] Os elementos de ${}^{ur}\boldsymbol{\tau}$ são chamados os **intervenientes** no caso de correspondência. ▲

Notar que um interveniente é um urelemento, nunca podendo ser $\widehat{\varnothing}$. Um caso de correspondência pode ter só um interveniente, ou não ter intervenientes, conforme as correspondentes duplas tenham uma componente nula, ou ambas as componentes nulas.

É possível considerar conjuntos em que todos os seus elementos sejam casos de correspondência, sejam duplas.

[DVIII.04] Chama-se acontecimento de correspondência, ou simplesmente **correspondência** a um conjunto no qual todos os elementos sejam actos de correspondência. ▲

[DVIII.05] Chama-se correspondência elementar ou **caso de correspondência** a uma correspondência que seja um singletão. ▲

Desta forma um caso de correspondência é um conjunto cujo único elemento é um acto de correspondência.

[DVIII.06] Uma correspondência é dita NTT se todos os seus elementos forem duplas NTT. ▲

[DVIII.07] Uma correspondência é dita TT se pelo menos um dos seus elementos puder ser considerado uma dupla TT. ▲

Neste texto uma correspondência é muitas vezes representada por um único símbolo, que é uma maísculas do alfabeto latino, preferencialmente num tipo de letra "sans-serif", como o Arial e nunca em itálico. No caso dessa transformação ser NTT procurar-se-á assinalar o símbolo com uma titulação pela marca '$\breve{\breve{}}$', um duplo parêntesis curvo deitado cuja concavidade aponta para cima, como por exemplo em $\breve{\breve{\mathsf{T}}}$. No caso dessa transformação ser TT procurar-se-á assinalar o símbolo com uma titulação pela marca '$\hat{\hat{}}$', um duplo parêntesis curvo deitado cuja concavidade aponta para baixo, como por exemplo $\hat{\hat{\mathsf{T}}}$. Quando sobre uma transformação nada for dito acerca de ser TT ou ser NTT, pressupõe-se que é TT. Notar a distinção notacional: $\hat{\hat{\mathsf{T}}}$ é um conjunto que é uma transformação TT, $\hat{\mathbb{T}}$ é o uramontoado do urdomínio $\mathbb{T}$.

VIII.1.2 - Produto urcartesiano

Como referido em «II.3 - Conceitos e conhecimentos pressupostos », é considerado como conhecida com suficiente rigor a definição de par ordenado, (a,b) no sentido de Kuratowsky, $(a,b)\Leftrightarrow\{\{a\}\{ab\}\}$. É também considerado como conhecido com suficiente rigor o que se entende por produto cartesiano entre dois conjuntos quaisquer, $A\times B$, onde o conjunto B não tem necessariamente de ser distinto do conjunto A, que tem como resultado um conjunto de pares ordenados. Assume-se também que $(A\times B=C\times D)\Rightarrow((A=C)\wedge(B=D))$.

No entanto, neste texto é considerado que as definições anteriores são insuficientes, por várias razões:

a) Um par, enquanto conjunto, sugere fortemente um conjunto com dois elementos. No entanto, um par pode ser um conjunto só com UM elemento, como é o caso de $(a,a)\Leftrightarrow\{\{a\}\}$, consequência manifesta da definição considerada.

b) Seja $A=\{a\}$. Como consequência directa da definição, tem-se que tanto $A\times A=\{\{a\}\}$, como $A\times\varnothing=\{\{a\}\}$ o que é uma situação onde parece que $A=\varnothing$.

c) Não é muito claro como definir um terno ordenado, se como $((a,b),c)$, se como $(a,(b,c))$, se ainda como (a,b,c). Neste último caso nem sequer está definida a sua obtenção a partir da definição de Kuratowsky.

d) A definição de um produto cartesiano iterado, como $A\times B\times C$ permite obter que tipo de ternos ordenados? Se como é habitual em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$, for um terno da forma (r_1,r_2,r_3), então como compatibilizar o facto de que, por um lado, um par ordenado é definido a partir de conjunto de Kuratowsky, com o facto de que, por outro lado, um terno ordenado é um terno ordenado e não tem de ser definido a partir de conjunto algum.

Na tentativa de colmatar as insuficiências justamente expostas, procurou-se neste texto formular as convenientes definições alternativas, onde as propriedades habituais se mantivessem e estas insuficiências se dissipassem.

Sendo assim, vai continuar a ser usado o conceito de caso de correspondência anteriormente elaborado.

[DVIII.08] Chama-se produto urcartesiano NTT entre os urdomínios $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, nenhum deles vazio, por esta ordem, com símbolo $\mathbb{U}\check{\times}\mathbb{V}$, ao conjunto de todas as duplas NTT possíveis de estabelecer entre os dois urdomínios tais que, em todas elas, a primeira componente é também elemento de $\mathbb{U}$ e a segunda componente é também elemento de $\mathbb{V}$. ▲

Notar que as componentes são urelementos e portanto uramontoados.

[DVIII.09] Chama-se produto urcartesiano TT entre os urdomínios $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, por esta ordem, com símbolo $\mathbb{U}\hat{\times}\mathbb{V}$, ou simplesmente **produto urcartesiano**, ao conjunto de todos os casos de correspondência entre $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$. ▲

Ao referir simplesmente o produto urcartesiano, sem referir se é TT ou NTT, fica convencionado de que se está a pressupor a tolerância, que o produto urcartesiano é o $\hat{\times}$.

O produto urcartesiano é assim um conjunto de duplas ordenadas, chamado o conjunto urcartesiano, ou simplesmente o **urcartesiano**.

[DVIII.10] Uma **urrelação** é um subconjunto do urcartesiano. ▲

[TVIII.02] Qualquer urrelação é uma transformação. ■

É com base nestas definições que é possível proceder à definição das operações em geral. Estas podem, ou não, ser tolerantes, conforme os conjuntos urcartesianos envolvidos sejam, ou não, tolerantes. Uma introdução a esse procedimento é abordada no próximo capítulo. Antes, porém, é necessário tecer algumas considerações.

VIII.1.3 - Iteração de produtos urcartesianos

Seja $\mathbb{A}$ um urdomínio. O produto urcartesiano só está definido para urdomínios pelo que a sua iteração, sem utilizar o conceito de encapsulamento que será apresentado mais à frente, não permite considerar interpretações do tipo $(\mathbb{A}\hat{\times}\mathbb{A})\hat{\times}A$ nem $\mathbb{A}\hat{\times}(\mathbb{A}\hat{\times}\mathbb{A})$. Resta assim indicar qual a interpretação correcta para $\mathbb{A}\hat{\times}\mathbb{A}\hat{\times}\mathbb{A}$, o que é feito já de seguida.

[DVIII.11] Define-se $\underset{1}{\hat{\times}}\mathbb{A}$ (em alternativa $\underset{1}{\check{\times}}\mathbb{A}$), ou simplesmente $\hat{\times}\mathbb{A}$ (em alternativa $\check{\times}\mathbb{A}$), como o conjunto de todos os 1-tuplos TT (em alternativa NTT) possíveis de elaborar com base em elementos de A. ▲

Notar que $\check{\times}\{abc\}=\{\{a\}\{b\}\{c\}\}=\{[a][b][c]\}$ e que $\hat{\times}\{abc\}=\{\{a\}\{b\}\{c\}\{\}\}=\{[a][b][c][\hat{\varnothing}]\}$.

[DVIII.12] Defina-se $\underset{2}{\hat{\times}}\mathbb{A}$ (em alternativa $\underset{2}{\check{\times}}\mathbb{A}$) como o conjunto de todos os 2-tuplos TT (em alternativa NTT) possíveis de elaborar com base em elementos de $\mathbb{A}$. ▲

Notar que $\underset{2}{\check{\times}}\{a\,b\,c\}=\{[a,a][a,b][a,c][b,a][b,b][b,c][c,a][c,b][c,c]\}$, e que

$\underset{2}{\hat{\times}}\{a\,b\,c\}=\{[a,\hat{\varnothing}][a,a][a,b][a,c][b,\hat{\varnothing}][b,a][b,b][b,c][c,\hat{\varnothing}][c,a][c,b][c,c][\hat{\varnothing},a][\hat{\varnothing},b][\hat{\varnothing},c][\hat{\varnothing},\hat{\varnothing}]\}$.

[DVIII.13] O conjunto de todos os tuplos NTT de comprimento n possíveis de realizar com elementos de $\mathbb{A}$ será $\underset{n}{\check{\times}}\mathbb{A}, n\in\mathbb{N}$. ▲

[DVIII.14] O conjunto de todos os tuplos TT de lotação n possíveis de realizar com elementos de A será $\underset{n}{\hat{\times}}\mathbb{A},\ n\in\mathbb{N}$. ▲

[nDVIII.01] Não fica definido o que se entende por $\underset{0}{\hat{\times}}\mathbb{A}$ (em alternativa $\underset{0}{\check{\times}}\mathbb{A}$). ▲

Lide-se agora com urdomínios possivelmente distintos. Seja agora $\boldsymbol{U}=\{\cdots,\mathbb{D},\cdots\}$ um conjunto finito e não nulo de cardinalidade k, de elemento genérico $\mathbb{D}$. Todos os elementos de $\boldsymbol{U}$ são urdomínios.

[DVIII.15] Dados n conjuntos pertencentes a $\boldsymbol{U}$, não necessariamente distintos, $\mathbb{D}_1\,\mathbb{D}_2\cdots\mathbb{D}_n$, chama-se produto urcartesiano tolerante de n urdomínios, ou simplesmente ***n*- urcartesiano**, com representação simbólica $\mathbb{D}_1\,\hat{\times}\cdots\hat{\times}\,\mathbb{D}_n$, simplificável para $\underset{n}{\overset{\frown}{\times}}$, ao conjunto de todos os possíveis tuplos $\mathbf{d}$ tais que a lotação de todos eles é sempre n e onde, além disso, se tem em todos eles que $d_i\,\hat{\in}\,\mathbb{D}_i,\ 1\leq i\leq n$, onde $d_i\ \hat{=}\ \hat{\pi}_i(\mathbf{d})$. ▲

Tem-se assim que $\underset{n}{\overset{\frown}{\times}}=\mathbb{D}_1\,\hat{\times}\cdots\hat{\times}\,\mathbb{D}_n$ e que $\mathbf{d}\in\underset{n}{\overset{\frown}{\times}}$.

VIII.2 - Sobre os Tuplos

Como se viu, seja $\mathbb{A}$ um urdomínio. Tem-se que $[\hat{\varnothing}]=[\,]=\{\}$, e é um dos tuplos no urcartesiano definido por $\underset{1}{\hat{\times}}A$. Considere-se agora um *n*-urcartesiano genérico $\underset{n}{\overset{\frown}{\times}}$ entre *n* ursimples. Os elementos deste conjunto serão tuplos TT. A lotação de qualquer destes tuplos será justamente n. Se esses *n* ursimples forem sempre o mesmo ursimples, o mesmo alfabeto,

o tuplo resultante poderá ser chamado de fiada. No entanto o seu comprimento pode ser no mínimo zero e no máximo n.

VIII.2.1 - Fiadas e tuplos

Sobre o conceito de sequência de elementos de um conjunto, ou fiada, ou *string*, importa relembrar «DVIII.13-14», onde é afirmado que Ξ é um alfabeto quando for um ursimples, um urdomínio finito, cujos elementos serão nesse caso preferencialmente chamados símbolos, ou caracteres.

Sem perda de generalidade, sejam a e b símbolos de um alfabeto Ξ. As fiadas literais, construídas com base em elementos de Ξ são escritas entre aspas, como $"abb"$. Representa-se por Ξ^2 o conjunto de todas as duplas em $\Xi \breve{\times} \Xi$, ou seja o conjunto de todas as fiadas de comprimento dois obteníveis com elementos de Ξ. Representa-se por Ξ^3 o conjunto de todos os ternos ordenados em $\Xi \breve{\times} \Xi \breve{\times} \Xi$ e, por generalização indutiva, Ξ^n representa o conjunto de todos os *n*-plos ordenados possíveis de obter com elementos de Ξ.

Na notação da álgebra clássica tem-se que $2 = 2^1 = 2^{\hat{\varnothing}}$. Na especificidade da notação dos produtos urcartesianos há que constatar que o conjunto Ξ, enquanto $\Xi^{\hat{\varnothing}}$ deve ser distinguido do conjunto Ξ^1, obtido por $\underset{1}{\breve{\times}}\Xi$, tendo-se pois que $\Xi \neq \Xi^1$. Notar que Ξ^1 é o conjunto de todos os singletões possíveis de formar com os elementos de Ξ. Esta distinção é importante, pois muitas vezes é tentador escrever Ξ^1 como Ξ, o que constitui um habitual abuso de linguagem. Nesta ordem de ideias é adequado distinguir os elementos de Ξ, p. ex o símbolo $'a'$, das fiadas de comprimento unitário, p. ex. $"a"$. Ou seja $'a' \neq "a"$. Tal é o que acontece em muitas linguagens de computador, como por exempo na linguagem C (Kernighan-1988).

A fiada nula é definida como tendo comprimento zero, pelo que não pode ser obtida pelas construções anteriores, que são construções intolerantes. Para considerar a fiada nula é necessário trabalhar em termos tolerantes, pois para tuplos NTT o comprimento $\overset{\bullet}{\#}\mathbf{x} \in \mathbb{N}$, não admite o valor zero, tal como visto em «VII.2.3 - Normas relativas a tuplos ». Nestes termos, qualquer fiada $\mathbf{s}$ pode ter o seu comprimento $|\mathbf{s}|$ distinto da sua lotação, $|\hat{\#}\mathbf{s}|$, pois podem existir falhas na presença de caracteres. Nesta perspectiva a fiada literal só pode corresponder aos elementos presentes. Assim, embora o comprimento da fiada esteja sempre bem definido,

em termos tolerantes a lotação de qualquer fiada não fica definida. Qualquer fiada tal que a parte real $\overset{\bullet}{\#}\mathbf{s}$ seja nula pode ser considerada uma fiada nula.

É possível considerar o conjunto Ξ^0, cujos elementos são todas as fiadas de comprimento zero, necessariamente fiadas nulas, "", pois uma fiada nula é qualquer tuplo de comprimento nulo, independentemente do seu tamanho. Isto é coerente com o facto de que $"a"\nmid""\nmid"b" = "ab" = ""\nmid"a"\nmid""\nmid"b"\nmid""$. Tal a magnitude de uma fiada é sempre indeterminado, a sua lotação também o é. Por isso é costume considerar apenas o comprimento de uma fiada, $|\mathbf{s}| = \overset{\bullet}{\#}\mathbf{s}$ e que a fiada nula é única.

Como visto, para poder criar fiadas nulas foi necessário trabalhar com urcartesianos tolerantes. Convenciona-se que na notação Ξ^n o n indica o comprimento da fiada. Desta forma Ξ^2 representará o conjunto de todas as fiadas de comprimento dois mas não o conjunto de todas as fiadas de comprimento igual ou menor que dois.

A concatenação de fiadas é indicada por '$\nmid$', sendo a fiada nula o elemento neutro. A concatenação de um elemento de Ξ^m com um elemento de Ξ^n, tem como resultado um elemento de Ξ^{m+n}, com $m,n \in \mathbb{N}_0$. A união, $\cup$, de Ξ^0 com Ξ^1, com Ξ^2, com Ξ^3, e assim por aí em diante, produz Ξ^*, o conjunto de todas as fiadas finitas. O conjunto de todas as fiadas finitas e não nulas é representado por Ξ^+. Tem-se pois que $\Xi^+ \cup \Xi^0 = \Xi^*$.

VIII.2.2 - Encapsulamento

Como visto em «VIII.1.2 - Produto urcartesiano», o produto urcartesiano só está definido para urdomínios pelo que a sua iteração não permite considerar interpretações do tipo $(\mathbb{A} \times \mathbb{A}) \times \mathbb{A}$ nem $\mathbb{A} \times (\mathbb{A} \times \mathbb{A})$ mas apenas $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \times \mathbb{A}$. Isto porque os elementos do conjunto $(\mathbb{A} \times \mathbb{A})$ não são urelementos pelo que o impedem de ser um urdomínio.

É no entanto sempre possível estabelecer uma bijecção entre os elementos de um urdomínio de cardinalidade apropriada e os elementos de qualquer conjunto de tuplos. Esta bijecção realiza o encapsulamento, '$\approx$', dos tuplos em urelementos. Uma vez encapsulado por urelementos, o conjunto é considerado um urdomínio até ser desencapsulado, pelo que já é possível participar num produto urcartesiano. Exemplifique-se este procedimento com quatro conjuntos ursimples, $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{x\}$.

Para calcular $(\{a\}\breve{\times}\{b\})\breve{\times}\{c\}$ procede-se do seguinte modo:

a) Calcula-se $\{a\}\breve{\times}\{b\}$ obtendo-se $\{\{a\{b\}\}\}$.

b) Encapsule-se $x{:}\approx\{a\{b\}\}$. Notar que o tuplo é um conjunto, que nunca pode ser um urlemento como o x. Assim, não é adequado escrever um sinal de igual, $=$, entre eles, preferindo-se explicitar o encapsulamento por um sinal $\approx$, que apenas sugere uma igualdade.

c) Calcule-se $\{x\}\breve{\times}\{c\}$, pois este produto está definido e é calculável, obtendo-se $\{\{x\{c\}\}\}$. Notar que sem encapsulamento, a expressão anterior viria $\{\{a\{b\}\}\}\breve{\times}\{c\}$, que é um produto que não está definido.

d) Desencapsule-se $x\approx{:}\{a\{b\}\}$. A expressão $\{\{x\{c\}\}\}$ transforma-se em $\{\{\{a\{b\}\}\{c\}\}\}$. Notar que quer $\{\{x\{c\}\}\}$ quer $\{\{\{a\{b\}\}\{c\}\}\}$ são singletões, mas só a primeira expressão é que o ppp permite considerar como um tuplo.

Assim, um tuplo desencapsulado pode já não ser um tuplo. Será mais aquilo que ituitivamente se poderia chamar de hipertuplo, um tuplo cujas componentes possam ser não apenas urelementos mas também tuplos e mesmo hipertuplos. Notar no entanto que do ponto de vista formal:

[nDVIII.02] Não fica definido o que é um **hipertuplo**. ▲

Mais uma razão para que se evite o sinal de igual para representar o encapsulamento/desencapsulamento.

Como exemplo adicional desta técnica, tem-se que $\{c\}\breve{\times}(\{a\}\breve{\times}\{b\})$ com o encapsulamento $x\approx{:}\{b\{a\}\}$ produzirá $\{\{c\{x\}\}\}$, o que após desencapsulamento será $\{\{c\{\{a\{b\}\}\}\}\}$, que é um singletão cujo único elemento já é um tuplo.

VIII.3 - Relações

Vão agora ser definidas as relações, base do modelo de dados relacional, (Codd-1970).

Seja agora $U=\{\cdots,\mathbb{D},\cdots\}$ um conjunto finito e não nulo de cardinalidade k, de elemento genérico $\mathbb{D}$. Todos os elementos de U são urdomínios.

[DVIII.16] Dados n conjuntos pertencentes a U, não necessariamente distintos, $\mathbb{D}_1\,\mathbb{D}_2\cdots\mathbb{D}_n$, diz-se que ξ é uma **relação** de grau n definida nestes k conjuntos, se ξ for um conjunto de tuplos, $\{\cdots,\boldsymbol{\tau},\cdots\}$, todos com a mesma

lotação n e se em todos e cada um desses tuplos $\boldsymbol{\tau}$ a primeira componente, quando presente, provier de $\mathbb{D}_1$, a segunda, quando presente, provier de $\mathbb{D}_2$, e assim desse modo por aí em diante (Codd-1970). ▲

Notar que a expressão $\pi_i(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{D}_i$ só estará definida se $\{\pi_i(\boldsymbol{\tau})\} \neq \{\,\}$, pelo que se terá $\{\pi_i(\boldsymbol{\tau})\} \subseteq \mathbb{D}_i$, $\forall \boldsymbol{\tau} \in \xi$ ou então que $\pi_i(\boldsymbol{\tau}) \hat{\in} \mathbb{D}_i$. De uma forma mais concisa, ξ será um subconjunto do n-urcartesiano $\mathbb{D}_1 \hat{\times} \mathbb{D}_2 \hat{\times} \cdots \hat{\times} \mathbb{D}_n$, ou seja: $\xi \subseteq (\mathbb{D}_1 \hat{\times} \mathbb{D}_2 \hat{\times} \cdots \hat{\times} \mathbb{D}_n)$.

VIII.3.1 - Sobre as relações

Em termos gerais, as relações de grau 1 são chamadas de *unárias*, as de grau dois de *binárias*, e as de grau *n* de *n-árias*, ou de *aridade n*. A lotação de um tuplo $\boldsymbol{\tau}$, $|\hat{\#}\boldsymbol{\tau}|$, é igual ao grau da respectiva relação, tendo-se pois que: $|\hat{\#}\boldsymbol{\tau}| = n$. A cardinalidade do conjunto de tuplos ξ é *m*, ou seja $\#\xi = m$. Uma aplicação prática deste facto é que muitas vezes as relações são representadas por tabelas regulares com *m* linhas, onde cada tuplo ocupa uma linha, e *n* colunas, onde cada urdomínio corresponde a uma coluna (Codd-1970). Relembre-se que uma tabela é dita regular quando todas as linhas têm o mesmo número de colunas e todas as colunas têm o mesmo número de linhas. A permutação de quaisquer duas colunas distintas da tabela que corporiza a relação conduz a uma relação diferente. Ainda é possível falar de relacionamentos, (Codd-1970), que são classes de equivalência de relações. Nessas classes de equivalência as relações só diferem entre si pela permutação de colunas nas tabelas que as corporizam.

VIII.3.2 - Projecções e aplicações

Seja dado um n-produto urcartesiano de $\mathbb{D}_1 \cdots \mathbb{D}_n$ urdomínios, pela ordem indicada, nem todos necessariamente distintos, $\mathbb{D}_1 \hat{\times} \mathbb{D}_2 \hat{\times} \cdots \hat{\times} \mathbb{D}_n$ que, segundo «DVIII.16», é um conjunto $\underset{n}{\widehat{\times}}$ de tuplos $\mathbf{x}$, e seja $\xi \subseteq \underset{n}{\widehat{\times}}$.

[DVIII.17] Chama-se projecção de ξ segundo a *i*-ésima componente ao conjunto

$\Pi_{\{i\}}(\xi) \subseteq \mathbb{D}_i$ que goza da propriedade

$(x_i \in (\Pi_{\{i\}}(\xi))) \Rightarrow (\exists \mathbf{x} \in \xi : x_i = \hat{\pi}_i(\mathbf{x}))$ com $1 \leq i \leq n$. ▲

Notar que o pi maiúsculo aplica-se a conjuntos de tuplos e permite obter conjuntos de urelementos, e que o pi minúsculo aplica-se a tuplos e permite obter urelementos.

[SVIII.01] Pode considerar-se uma notação apoiada na forma do índice do pi. Se este índice for tão somente i o resultado é um uramontoado. Se for $\{i\}$, o resultado é um conjunto. Se for $[i]$ o resultado é um tuplo. ♦

Convém definir aplicação TT. Esta definição será instrumental para a futura definição de operação binária tolerante.

[DVIII.18] Chama-se **aplicação TT** a qualquer transformação $\underset{2}{\widehat{\times}}$, cuja cardinalidade seja $\#\left(\underset{2}{\widehat{\times}}\right) = 1+\#\mathbb{D}_1$, tal que $\Pi_{\{1\}}\left(\underset{2}{\widehat{\times}}\right) = \mathbb{D}_1$ e em que exista sempre um único elemento $\mathbf{x} \in \underset{2}{\widehat{\times}}$ tal que $[\,] = \hat{\pi}_{[1]}(\mathbf{x})$. ▲

Uma aplicação TT é assim uma transformação em que que cada elemento de $\mathbb{D}_1$ é interveniente uma única vez e em que, além disso, só há um único caso de correspondência com a primeira componente nula.

VIII.3.3 - Relações binárias

Embora as relações de qualquer aridade sejam importantes por direito próprio, as relações binárias merecem classificações autónomas, quer pelo interesse que o seu estudo possui, quer também pelo facto de que são a base para a construção posterior de muitos conceitos importantes e fundamentais, como os de função e de operação, conceitos estes que são basilares ao desenvolvimento e aplicação de qualquer teoria.

[DVIII.19] De acordo com o exposto, uma **relação binári**a R é um subconjunto de um produto 2-urcartesiano $\mathbb{D}_1 \hat{\times} \mathbb{D}_2$, tendo-se $R \subseteq (\mathbb{D}_1 \hat{\times} \mathbb{D}_2)$. ▲

Nas relações binárias NTT é tradicional chamar contradomínio, ao conjunto $\mathbb{D}_2$, ficando o nome de domínio reservado para o conjunto $\mathbb{D}_1$, sendo a relação binária representada por $\mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2$. Visto a relação binária ser entendida como um conjunto de duplas, tem-se que $(\mathbb{D}_1 \rightarrow \mathbb{D}_2) \subseteq (\mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2)$. Para representar a relação binária, também é costume encontrar a notação equivalente $x \mathrm{R} y$ com $x \in \mathbb{D}_1 \wedge y \in \mathbb{D}_2$.

VIII.3.4 - Índices e ordenações

Como os urdomínios $\mathbb{D}_i$ e seus urcartesianos $\mathbb{D}_1 \hat{\times} \cdots \hat{\times} \mathbb{D}_n$ são conjuntos, em todos eles é sempre possível definir relações de ordem total.

[DVIII.20] Quando num urdomínio $\mathbb{D}_i$, ou num produto *n*-urcartesiano de urdomínios, $\mathbb{D}_1 \hat{\times} \cdots \mathbb{D}_i \hat{\times} \cdots \hat{\times} \mathbb{D}_n$, estiver definida uma ordem total $\prec_i$, dir-se-á que $\mathbb{D}_i$, respectivamente $\mathbb{D}_1 \hat{\times} \cdots \mathbb{D}_i \hat{\times} \cdots \hat{\times} \mathbb{D}_n$, é ordenado, ou **indexado**, por $\prec_i$. ▲

Muitas vezes esta ordenação é vista como consequente de uma aplicação de $\mathbb{D}_i$, ou de $\mathbb{D}_1 \hat{\times} \cdots \mathbb{D}_i \hat{\times} \cdots \hat{\times} \mathbb{D}_n$, para um subconjunto N de $\mathbb{Z}$ com cardinalidade adequada.

VIII.3.4.1 - Indexações: múltiplas, únicas e sequenciais

Como se verá já no seguimento, os sinais de índole discreta são vistos como relações indexadas. Nesta aplicação prática lida-se muitas vezes com repetições, pelo que importa pormenorizar a conceptualização adequada para estes casos.

Seja Ξ um conjunto de relações. Para toda e qualquer relação $\xi \in \Xi$ são definíveis aplicações, da totalidade dos seus elementos $\boldsymbol{\tau}$, para todos os elementos n num subconjunto N de $\mathbb{Z}$.

[DVIII.21] A toda e qualquer dessas aplicações, $\nu : \xi \to N \subset \mathbb{Z}$ chamar-se-á "**regra de indexação**". ▲

Notar que estas aplicações ν são tais que para cada $\boldsymbol{\tau} \in \xi$, existe sempre um e um só correspondente valor $n \in N$, mas que a $\boldsymbol{\tau}$ distintos poderá corresponder o mesmo valor $n \in N$, chamado de índice múltiplo.

[DVIII.22] Sendo este o caso, a aplicação ν é chamada de **indexação múltipla**. ▲

Notar também que neste caso a aplicação ν não é injectiva, pois tal obrigaria que a distintos $\boldsymbol{\tau}$ correspondessem distintos n. No entanto, todos os elementos $n \in N$ são imagem de pelo menos um elemento $\boldsymbol{\tau} \in \xi$. Está-se assim perante a indexação múltipla, a qual abrange todos os elementos de ξ, e em que o mesmo *n* pode ser a imagem de diversos $\boldsymbol{\tau}$.

[DVIII.23] Quando ν for tal que para cada $\boldsymbol{\tau}$ exista sempre um e um só correspondente valor $n \in \mathbb{Z}$, a aplicação será bijectiva entre ξ e um subconjunto

$N \subset \mathbb{Z}$, e será chamada de “**indexação única**” de ξ, e o número inteiro n, associado a cada $\boldsymbol{\tau}$, será chamado de índice único, ou simplesmente **índice**. ▲

Uma regra de indexação ν é pois concretizada num conjunto $\{\cdots,\{\boldsymbol{\tau},n\},\cdots\}$de conjuntos de cardinalidade dois, podendo ser uma indexação múltipla ou uma indexação única. Em todos estes conjuntos de cardinalidade dois, um dos elementos é um tuplo sendo o outro um número natural.

Como facilmente se depreende, em qualquer regra de indexação a cardinalidade de ξ nunca pode ser inferior à cardinalidade de N. Ou é superior ou é igual. No entanto, quando ν for uma indexação única, a cardinalidade de ξ é forçosamente igual à cardinalidade de N. Neste caso a ordem natural dos $n \in N$ induz em ξ uma relação de ordem total.

[DVIII.24] A ordenação total de ξ induzida por uma indexação única, é chamada **encadeamento** de ξ. ▲

Mas nada garante que índices consecutivos sejam números inteiros consecutivos.

[DVIII.25] Se a indexação única for tal que índices consecutivos sejam inteiros consecutivos, a indexação será chamada de “indexação sequencial”, ou simplesmente **indexação**. ▲

Neste caso, o encadeamento é chamado de serialização, ou **sequenciação** de ξ, e o conjunto $\{\boldsymbol{\tau},n\}$, de cardinalidade dois, é representada por $\boldsymbol{\tau}[n]$ e é chamada amostra.

Uma indexação permite pois definir um conjunto de amostras, é representada por $\{\boldsymbol{\tau}[n]\}$, e é possível falar na sequência $\{\boldsymbol{\tau}[n]\}$. Uma amostra será o objecto representado por $\boldsymbol{\tau}[n]$. Quando, dado um certo $\boldsymbol{\tau}[n] \in \{\boldsymbol{\tau}[n]\}$, se pretender referir apenas o respectivo $\boldsymbol{\tau}$, falar-se-á do valor da amostra $\boldsymbol{\tau}[n]$. Quando se pretender referir apenas o n, falar-se-á do índice da amostra $\boldsymbol{\tau}[n]$. Desta forma é possível falar do valor de uma amostra e do índice de uma amostra.

VIII.3.4.2 - Indexações simples versus indexações compostas

Numa indexação única, sequencial ou não, é possível de acordo com a conveniência, considerar o índice n função de $\boldsymbol{\tau}$, sendo tal função referida como a função indexante, ou alternativamente, considerar o tuplo $\boldsymbol{\tau}$ função de n, falando-se neste caso de uma função de acesso ao valor a partir do índice.

Em muitas situações de interesse prático é até possível considerar o índice n função de apenas parte dos elementos de $\boldsymbol{\tau}$, ou mesmo de um único. Nesta última situação diz-se que a indexação é simples. Este último caso acontece amiúde, quando a precisa origem temporal não encerra interesse, e a amostragem é regular. Neste caso, os instantes de amostragem, normalmente referenciados a zero, são passíveis de ser bijectivados com os índices n, sendo irrelevante para o efeito os outros elementos do tuplo que representam p. ex., intensidades luminosas ou sonoras.

[DVIII.26] Diz-se que a indexação é composta quando é efectuada tendo por base mais do que uma única componente de $\boldsymbol{\tau}$. ▲

VIII.4 - Sinais discretos

[DVIII.27] Diz-se que Ξ é um **sinal discreto** se em todo e cada $\xi \in \Xi$ estiver definida pelo menos uma sequenciação. ▲

O teorema da boa ordem, (Suppes-1972) (Rubin-1967), afirma que, qualquer que seja o conjunto, é sempre possível definir pelo menos uma boa ordem. Para qualquer conjunto finito a boa ordem é uma ordenação total, e portanto, qualquer que seja ξ, é sempre possível definir pelo menos uma serialização, ou sequenciação ν. Mas ser possível definir não quer dizer que esteja definida. Por isso, não é de mais salientar que, embora em qualquer conjunto Ξ de relações ξ, seja sempre possível definir pelo menos uma serialização para todo e qualquer dos seus elementos, para que Ξ seja um sinal discreto todos os seus elementos têm que ter pelo menos uma serialização definida. Pelo que um sinal discreto não é apenas um conjunto de relações. É sim um conjunto de relações indexadas.

VIII.4.1 - Sinais como relações indexadas

Num sinal discreto, para cada ξ, podem estar definidas mais do que uma serialização, mas apenas uma e sempre uma é que é considerada como primária, ou activa, ou de referência. À parte excepções pontuais devidamente assinaladas, a partir daqui ν deverá ser sempre interpretada como sendo a indexação activa de ξ.

Em consequência, num sinal discreto, se para um dado ξ está definida apenas uma serialização, esta é necessariamente a de referência. Às serializações não activas será dado o nome de serializações alternativas. Por outro lado, dada uma relação ξ arbitrária, é sempre

possível definir uma serialização. Pelo que para qualquer conjunto de relações, Ξ, basta definir uma ordem total nas relações que ainda não a tenham, para que Ξ passe a ser um sinal discreto.

Utilizando a técnica do encapsulamento, é possível falar de $[\xi,\nu]$, onde ξ é uma relação, e ν a sua serialização activa. Qualquer conjunto $\{\cdots,[\xi,\nu],\cdots\}$, onde cada relação ξ é serializada por ν, é considerado um sinal discreto. De forma equivalente, pode ser afirmado que qualquer sinal discreto é um conjunto de relações indexadas. Se pelo menos uma das $\xi\in\Xi$ não estiver serializada, então Ξ já não poderá ser um sinal discreto, embora possa sempre ser convertido num sinal discreto.

Um outro aspecto que convém salientar é que, como se viu, numa relação todos os tuplos são distintos, independentemente do facto de a relação estar, ou não estar, indexada. Sendo assim, quando a relação está sequenciada, a aplicação $\nu:\xi\rightarrow N\subset\mathbb{Z}$ é bijectiva. Isto porque numa relação não existem tuplos repetidos. Para o engenheiro defrontado com a sua prática tal facto pode originar perplexidades. Senão veja-se o seguinte caso. Considere-se um sinal contínuo constante, amostrado a um determinado ritmo. Obtêm-se assim aquilo que é comummente referido como amostras todas com o mesmo valor, porque o sinal é constante. E apetece concluir: "Então se as amostras têm todas o mesmo valor, todos os tuplos têm o mesmo valor, pelo que existem casos em que num sinal têm de ser considerados tuplos repetidos, ou então o sinal só pode ter um tuplo!".

O ponto de vista defendido no presente texto é que tal não pode ser admitido. A interpretação aqui advogada é a seguinte. Para este caso, o valor de cada amostra é um tuplo, de aridade dois. O primeiro elemento do tuplo representa a amplitude de certa grandeza física. E o segundo elemento representa o instante de amostragem. Por conveniência de representação, é possível usar a redundância inerente a esta situação para abdicar, sem perda de informação, da representação explícita de tuplos, e/ou elementos de tuplos. Desta forma, conhecendo o ritmo de amostragem, todos os sinais constantes para os quais seja desnecessário o conhecimento do instante de início, podem ser representados por um único valor, que não é mais do que a amplitude, invariante no tempo. A partir desta singela representação e do conhecimento do ritmo de amostragem, pode o sinal ser reconstruído sem erro. Pelo que é preciso saber distinguir entre um sinal, e uma representação particular desse mesmo sinal. Numa representação particular de um dado sinal pode parecer que existem

tuplos repetidos, mas fica aqui expresso com exactidão de que do ponto de vista formal, tal nunca pode acontecer.

VIII.4.2 - Sinais discretos unidimensionais

Em telecomunicações, em controlo, em medicina, em multimédia, e em muitas outras áreas de actividade, as duplas que registam os dados num sinal discreto são vulgarmente obtidos por amostragem, e chamadas de amostras. No entanto, noutros contextos, já um sinal discreto pode não ser obtido por amostragem nem considerado como formado por amostras. Nos mercados financeiros em lugar do termo *amostra*, é normal usar o termo *cotação*. Não obstante, como visto em «II.4 - Pormenores da notação relativa a sinais discretos», é prática comum chamar amostras às duplas que formam um sinal discreto, mesmo que não sejam obtidos por amostragem.

Por outro lado, lidando com amostras entendidas de forma tão lata, podem ocorrer situações em que não seja adequado considerar que se está perante um sinal discreto genuíno. Por isso, para que um sinal discreto possa ser considerado válido, é necessário que obedeça às seguintes condições:

- Um sinal discreto é um conjunto de amostras, em que cada uma delas é formada por um valor e um índice.
- Numa amostra, existe sempre quer o valor, quer o índice.
- Um sinal discreto tem sempre um número finito de amostras.
- Um sinal discreto tem sempre pelo menos uma amostra.

Numa grande parte dos casos de interesse, o valor de uma amostra é de índole numérica. No caso particular dos índices representarem localizações, ter-se-á um sinal discreto no espaço, ou série espacial, ou sequência espacial. No caso particular dos índices representarem instantes do tempo, ter-se-á um sinal discreto no tempo, ou série temporal, ou sequência temporal.

Não se considera possível existirem sinais sem amostras. Num sinal, não existem índices repetidos, pois como se viu, num sinal, não podem existir amostras com índices idênticos.

Em conclusão, um sinal discreto é formado por amostras, sendo cada uma destas, por sua vez, formada por um valor e um índice, nenhum deles necessariamente numérico. Tanto os valores como os índices são entendidos como ocorrendo de forma discreta, não contínua.

No entanto, a representação, quer dos valores, quer dos índices, é normalmente efectuada de forma numérica. Além disso, os valores são muitas vezes apresentados como provenientes de um conjunto contínuo, como os números reais, enquanto que os índices provêm de um conjunto numerável, como os inteiros.

VIII.4.2.1 - Exemplos de sinais

No caso particular de um sinal discreto unidimensional o conjunto de relações que o forma tem como elementos apenas uma única relação binária, em que um dos domínios representa o valor de uma grandeza, e o outro domínio é um índice, não obrigatoriamente de índole temporal.

Num sinal digital de áudio mono, um dos domínios é o conjunto de valores possíveis de ser obtidos à saída do conversor A/D, e o outro representa o tempo. Saliente-se aqui novamente que ambos os domínios podem ser ordenados totalmente pela habitual relação $<$, mas que tal só é usado no domínio índice.

No caso habitual de um sinal de áudio estéreo, ter-se-á uma relação ternária, em que dois dos domínios representarão o mesmo conjunto de saídas possíveis do conversor A/D, e o terceiro representa o tempo.

Considere-se o sinal que representa as cotações da companhia PT (Portugal Telecom SGPS SA), transacção a transacção. Neste início de século XXI esta companhia é cotada simultaneamente em duas bolsas: NYSE e EuroNext. Em cada uma das bolsas a informação relativa a cada negócio consiste na cotação, número de acções, DataHora da transacção, com granularidade ao segundo, e número sequencial do dia. Dois negócios na mesma bolsa são distintos porque não podem ter a mesma DataHora e o mesmo número sequencial. Se forem de bolsas diversas, tal já poderá acontecer. A indexação será assim uma indexação composta, tendo a função indexante aridade dois. Tem-se assim neste exemplo que Ξ será o sinal que representa a cotação da PT, e conterá duas relações ξ, uma para cada bolsa. Cada uma das relações ξ é serializada por uma função indexante que tem como argumentos DataHora e número sequencial do dia.

Finalmente, considere-se o caso de uma imagem RGB. O sinal Ξ representa um mosaico regular de pixéis. Este sinal conterá apenas uma relação ξ, onde cada amostra, que contém informação sobre os três valores RGB e as coordenadas XYZ, representa um pixel

individual. A relação ξ é serializada pela combinação adequada das coordenadas XY. A indexação é assim composta, tendo a função de indexação aridade dois.

VIII.5 - Súmula

Abordaram-se os produtos urcartesianos, as relações tolerantes e os sinais.

Seguidamente vai ser feito um resumo, quer das conclusões quer das linhas de investigação que podem ser prosseguidas, com o qual se termina este texto

IX - Conclusões

IX.1 - Aspectos finais

As decomposições abelianas permitem decompor um sinal em várias componentes cuja soma integral resulta na reconstrução do sinal. A decomposição EMD é uma decomposição abeliana empírica, não utiliza funções de base pré fixadas. A EMD foi desenvolvida para a decomposição de sinais discretos que oscilam em torno de uma tendência mas que possuem características não estacionárias. O algoritmo de decomposição EMD é intrinsecamente discreto.

Contrariamente ao habitual, a EMD não tem uma definição analítica, mas apenas algorítmica. Tal coloca dificuldades formais, especialmente no início e fim do sinal pois aí não estão presentes as amostras requeridas pelo algoritmo para funcionar correctamente. Estas dificuldades são motivadoras para investigações sobre as implicações formais da ausência de amostras no processamento de sinais. Note-se que estas dificuldades, induzidas pela presença das extremidades limítrofes do sinal, são transversais e comuns a todos os processamentos de sinais de duração limitada.

IX.1.1 - Características da EMD

A motivação prática para este texto surgiu pela necessidade de formalizar os problemas encontrados na aplicação da EMD. Esta formalização teria de provir directamente de conceitos muito gerais e basilares pois a EMD não tem justificação analítica Relembre-se que esta decomposição origina vários modos oscilantes empíricos de média nula, $\varphi_i(t)$, convencionalmente chamados IMF (*Intrinsic Mode Functions*), funções de modo intrínsecas, que podem no entanto ser interpretadas como sinais AM/FM de portadora sinusoidal: $\varphi_i(t) = A_i(t)\cos(\theta_i(t))$, cujas envolventes são simétricas (Ortigueira-2004). Para além de um conjunto de IMFs, a EMD origina também um sinal residual, apelidado *trend*, onde se encontra a informação de média e tendência.

As IMFs são geradas por ordem decrescente de frequências centrais. Além disso o algoritmo comporta-se como um banco de filtros (Rato-2008b) (Flandrin-2004b), podendo o resultado final ser considerado como uma decomposição tempo frequência.

IX.1.2 - Problemas associados

Por ser uma técnica definida por um algoritmo, e não por uma formulação analítica, verifica-se que é muito dependente, quer de pequenos detalhes no software efectivamente empregue, quer de pequenos detalhes no próprio sinal.

A envolvente de um sinal discreto, não é uma função única. O número de IMFs não é predefinido. Basta uma pequena alteração no sinal para mudar este número. Além disso, está sempre presente o problema das extremidades e do mais adequado tratamento quando os dados são ausentes. As considerações teóricas sobre este assunto conduziram ao desenvolvimento do conceito de tolerância, entendido enquanto «tolerância à falha de presença de amostras», enquanto «tolerância à ausência».

IX1.3 - Desenvolvimentos teóricos formais

Foi elaborada a definição de vizinhança em sinais discretos, com base na qual foram desenvolvidas as funções classificativas para os máximos e os mínimos. As funções classificativas, tal como definidas, não são tolerantes a falhas, não são tolerantes à ausência de um argumento. Por isso nas extremidades estas funções não podem funcionar porque está ausente, não existe, uma das vizinhanças necessárias. Esta problemática da tolerância está na raiz das considerações teóricas desenvolvidas posteriormente, numa perspectiva finitista - construtivista da computação enquanto actividade mediada simbolicamente.

Foi realizada a apresentação, quer dos símbolos e sua utilização, quer da ausência de símbolo e sua utilização, enquanto suportes de toda a computação. Considerou-se que para lidar correctamente com a tolerância, consequente da ausência de símbolo, a lógica envolvida deverá ser a trivalente. Desta forma, sempre que for necessário trabalhar com operações tolerantes em geral e igualdades tolerantes em particular, é necessário considerar tal actividade num contexto de lógica trivalente.

Foi desenvolvida a definição de urconjunto, instrumental para a definição de operações tolerantes. Para isso aplicou-se uma numeração de Matula modificada para definir o ppp

(pseudo polinómio de pertença). Com base no ppp definiu-se o conceito de dupla ordenada com tolerância e prosseguiu-se para a definição dos tuplos tolerantes e das suas propriedades.

Finalmente atingiu-se a definição de produto cartesiano com tolerância, de forma permitir desenvolver a teoria das estruturas algébricas incorporando a possibilidade de tolerância. De acordo com a perspectiva desenvolvida, os sinais discretos são relações tolerantes indexadas.

IX.2 - Perspectivas futuras

O trabalho desenvolvido e exposto neste texto encerra múltiplas potencialidades futuras.

IX.2.1 - Perspectivas futuras: Quanto à EMD

O desenvolvimento do conceito operacional de extremo de um sinal discreto baseado em funções de vizinhança variável, e não fixa como foi descrito, é algo que carece de trabalho complementar. Relativamente à determinação das envolventes cumpre referir que são possíveis diferentes algoritmos que permitam garantir a característica de envolvente sem obrigar à tangencia obrigatória com o extremo discreto.

Relativamente à identificação e extracção das IMFs é possível explorar outras técnicas que não as baseadas na anulação da média entre as envolventes superior e inferior. A exploração dessas possibilidades, juntamente com a questão da convergência teórica do algoritmo permite antever um rico e profícuo campo de investigação a explorar.

IX.2.2 - Perspectivas futuras: Quanto à lógica trivalente

A lógica trivalente, tal como exposta, foi elaborada na perspectiva da síntese de circuitos capazes de a executarem. Um rico campo de investigação, que uma rápida revisão de literatura efectuada em 2010 permitiu identificar como muito promissor tem a ver om a simplificação das funções lógicas trivalentes, nomeadamente na generalização dos mapas de Veitch - Karnaugh para variáveis trivalentes.

IX.2.3 - Perspectivas futuras: Quanto à álgebra tolerante

Este texto não avançou para além da definição de produto cartesiano tolerante e do que é uma relação tolerante. Sendo assim e no sentido de atenuar as limitações deste texto, uma

linha de investigação que pode ser prosseguida consiste no desenvolvimento teórico da teoria das operações tolerantes.

Neste ponto duas grandes linhas de investigação se apresentam como muito importantes. Uma delas é o desenvolvimento das estruturas algébricas tolerantes, a outra é a concomitante teoria dos espaços vectoriais tolerantes, teoria essa que nos parece incontornável para lidar correctamente do ponto de vista teórico com operações tolerantes envolvendo sinais. O não desenvolvimento de tais teorias constitui uma limitação deste trabalho.

Quanto às estruturas algébricas tolerantes, é no entanto possível sugerir algumas linhas de investigação futura. Uma delas será sobre a definição e propriedades do que deve ser entendido como um grupo tolerante. Depois é possível investigar o enlace de operações tolerantes e estipular o que deve ser entendido por um anel tolerante e em que condições. Tais passos são preparatórios para a definição e desenvolvimento da conceptualização do que é um corpo algébrico tolerante. É natural que só depois disso é que se estará em condições de definir o que é um espaço vectorial tolerante e pesquisar quais as sua características.

Como início desses desenvolvimentos algébricos podemos sugerir os seguintes pontos:

IX.2.3.1 - Operações binárias tolerantes

O conceito de operação binária é bem conhecido, sendo normalmente definido a partir do conceito de par ordenado (Hungerford-1980; Oliveira-1982). Com vista a aceder em termos tolerantes ao âmago dos espaços vectoriais, comece-se por restabelecer, a partir do conceito de dupla TT, o que é uma operação binária tolerante.

[DIX.01] Uma **operação binária TT** definida num urdomínio S, com símbolo $\hat{\theta}$ sem perda de generalidade, é uma aplicação TT tal que, $\mathbb{D}_1$, o primeiro urdomínio corresponde ao encapsulamento do conjunto $S \hat{\times} S$, tendo-se pois $\mathbb{D}_1 :\approx S \hat{\times} S$ e em que o segundo urdomínio, $\mathbb{D}_2$, é o próprio conjunto S. ▲

Notar que a aplicação é TT, pelo que se pode dar a ausência do tuplo dos argumentos.

Simbolicamente, utilizando o símbolo da operação em notação infix, vem que $\forall s_1 \hat{\in} S, \forall s_2 \hat{\in} S: \left(s_1 \hat{\theta} s_2\right) \hat{\in} S$. No entanto, esta notação infix não realça suficientemente o facto de que numa operação binária TT, $\hat{\theta}$ actua sobre um 2-tuplo $\mathbf{s}$, o argumento (não necessariamente presente), de forma a produzir um urelemento s, o resultado. Tem-se que

$s \hat{\in} S$, pelo que s pode ser $\hat{\varnothing}$, por «DVI.17». Também se tem que $\mathbf{s} \hat{\in} (S \hat{\times} S)$, pois a aplicação é TT, pelo que da mesma forma $\mathbf{s}$ pode ser $\hat{\varnothing}$. Tal não coloca questões à escrita da operação em notação prefix. Em notação prefix a operação será escrita como $\hat{\theta}\mathbf{s} \hat{=}: s$. Esta expressão permite facilmente considerar o caso específico $\hat{\theta}\hat{\varnothing}$, em que se obtém um resultado na ausência de argumento. Este caso específico é dificilmente representado em notação infix, onde $\hat{\varnothing}\hat{\theta}\hat{\varnothing}$ corresponderá, em notação prefix, a $\hat{\theta}[\,,\,]$, que não é confundível com $\hat{\theta}\hat{\varnothing}$.

[DIX.02] Diz-se que uma operação binária TT é **moderada**, ou bem comportada, sse em notação prefix: $\hat{\theta}\hat{\varnothing} \hat{=}: \hat{\varnothing}$. No caso contrário diz-se não moderada, mal comportada ou **imoderada**. ▲

Esta definição é uma particularização da «DIX.04». Normalmente lida-se apenas com operações binárias TT moderadas.

Uma operação binária TT é uma operação com dois argumentos, as componentes s_1 e s_2 de qualquer dupla TT $[s_1, s_2] \in (S \hat{\times} S)$, e um resultado $s \hat{\in} S$.

Neste tipo de operações é possível considerar:

a) A existência de um elemento neutro como sendo aquele $s \hat{\in} S$ que, quando argumento, conduz a que o resultado seja igual (no sentido $\hat{=}$) ao outro argumento, qualquer que seja o outro argumento.

b) A existência de um elemento absorvente como sendo aquele $s \hat{\in} S$ que, quando argumento, conduz a que o resultado seja igual (no sentido $\hat{=}$) a ele próprio, qualquer que seja o outro argumento.

Foi assim estabelecida a definição de operação binária, no sentido tolerante, em que ambos os argumentos provêm do mesmo urdomínio. No entanto esta obrigação, dos argumentos terem de provir do mesmo urdomínio, é muito inibidora pois num espaço vectorial a multiplicação escalar, entre um escalar e um vector, actua entre elementos de conjuntos potencialmente diferentes, os escalares e os vectores.

No sentido de aliviar a restrição de origem dos argumentos, vai agora ser elaborado o conceito mais abrangente de operação diádica TT, da qual a operação binária TT é um caso particular.

IX.2.3.2 - Operações Diádicas - ODs

Para melhor formalizar a definição de operação diádica vai ser preciso considerar três urdomínios.

[DIX.03] Sejam $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$ três urdomínios não necessariamente distintos. Define-se operação diádica, **OD**, de símbolo $\hat{\phi}$ sem perda de generalidade, entre $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, por esta ordem, com resultados em $\mathbb{Z}$ como uma aplicação TT onde $\mathbb{D}_1$, o primeiro urdomínio corresponde ao encapsulamento de conjunto $\mathbb{X}\hat{\times}\mathbb{Y}$, tendo-se $\mathbb{D}_1 :\approx \mathbb{X}\hat{\times}\mathbb{Y}$ e em que o segundo urdomínio, $\mathbb{D}_2$, é o próprio conjunto $\mathbb{Z}$.



Simbolicamente, utilizando o símbolo da operação em notação infix, vem que $\forall x \hat{\in} \mathbb{X}, \forall y \hat{\in} \mathbb{Y} : \left(x \hat{\phi}\, y\right) \hat{\in} \mathbb{Z}$. Em notação prefix, com $\boldsymbol{\tau} \hat{\in} \left(\mathbb{X}\hat{\times}\mathbb{Y}\right)$ e $z \hat{\in} \mathbb{Z}$, vem $\hat{\phi}\boldsymbol{\tau} \hat{=}: z$.

[DIX.04] Diz-se que uma OD é **moderada**, não criativa ou bem comportada, sse em notação prefix $\hat{\phi}\hat{\varnothing} \hat{=}: \hat{\varnothing}$. No caso contrário diz-se não moderada, criativa, mal comportada ou **imoderada**. ▲

Esta definição é uma generalização da DIX.02.

Consequentemente uma operação diádica é uma operação com dois argumentos, as componentes x e y da dupla $[x, y] \in \left(\mathbb{X}\hat{\times}\mathbb{Y}\right)$, e um resultado $z \hat{\in} \mathbb{Z}$. Realce-se também que x, y e z não são em geral elementos de um mesmo urdomínio.

IX.2.4 - Perspectivas futuras: Quanto aos espaços vectoriais e teoria do sinal

Como justamente visto, uma das linhas de investigação futuras é a de definir o que é um espaço vectorial tolerante e pesquisar quais as sua características.

Como início dessa tarefa podemos sugerir os seguintes pontos, prévios à introdução da tolerância:

IX.2.4.1 - Espaços vectoriais simbólicos

Seja $\mathbf{V}$ um conjunto não vazio, sendo α um seu elemento genérico. Seja $\mathbb{F}$ um conjunto com pelo menos dois elementos, sendo c um seu elemento genérico. Os conjuntos $\mathbf{V}$ e $\mathbb{F}$ não são necessariamente distintos.

[DIX.05] Chamem-se vectores aos elementos de $\mathbf{V}$. Considere-se que em $\mathbf{V}$ está definida uma soma, cujo símbolo é $\vec{+}$, chamada soma vectorial. Esta operação é de tal forma que $\mathbf{V}$ munido desta soma vectorial é um grupo abeliano, doravante referido simplesmente como o grupo $\mathbf{V}$. Quer isto dizer que a soma vectorial é uma operação binária associativa e também comutativa (abeliana), que tem elemento neutro chamado vector nulo, representado por $0_{\mathbf{V}}$, e que todos os elementos têm um único oposto, chamado simétrico de α ou negativo de α e notado $-\alpha$, ou seja, tem-se

$$\forall \alpha \in \mathbf{V}, \exists^1 -\alpha \in \mathbf{V}: \; (\alpha \; \vec{+} -\alpha) = 0_{\mathbf{V}} = (-\alpha \, \vec{+} \, \alpha).$$

Notar que um vector, α, e o seu simétrico, $-\alpha$, não têm necessariamente de ser distintos. Por exemplo, o simétrico de $0_{\mathbf{V}}$ é o próprio $0_{\mathbf{V}}$, tendo-se pois $0_{\mathbf{V}} = -0_{\mathbf{V}}$.

Chamem-se escalares aos elementos de $\mathbb{F}$. Considere-se que em $\mathbb{F}$ estão definidas duas operações: uma soma associativa e comutativa, chamada soma entre escalares, cujo símbolo é $+$, cujo elemento neutro é 0, que é chamado de escalar nulo ou zero, e uma multiplicação associativa e comutativa, chamada multiplicação entre escalares, de símbolo omisso e sempre pressuposta aquando da escrita justaposta de elementos de $\mathbb{F}$, cujo elemento neutro é 1, que é chamado de escalar unitário ou um, necessariamente distinto de 0. Estas operações são de tal forma que $\mathbb{F}$ munido destas duas operações é um corpo, doravante referido simplesmente como o corpo $\mathbb{F}$.

Consequentemente tem-se que a multiplicação entre escalares é distributiva pela soma entre escalares, tal como expresso por $\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{F}: \; c_1(c_2 + c_3) = c_1 c_2 + c_1 c_3$

Diz-se que está definido um espaço vectorial do grupo de vectores $\mathbf{V}$ sobre o corpo de escalares $\mathbb{F}$, doravante simplesmente referido como espaço vectorial $\mathbf{V}$, quando está definido um produto à esquerda, cujo símbolo é '$\cdot$', dos elementos

de $\mathbb{F}$ por elementos de $\mathbf{V}$ e cujo resultado são vectores, forçosamente elementos de $\mathbf{V}$, produto esse chamado de multiplicação escalar (não confundir com multiplicação de escalares, ou entre escalares). Esta multiplicação escalar é sempre possível, ou seja, tem-se $\forall c \in \mathbb{F}, \forall \alpha \in \mathbf{V}, \exists (c \cdot \alpha): (c \cdot \alpha) \in \mathbf{V}$, de tal forma que:

a) $\forall c \in \mathbb{F}, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{V}: c \cdot (\alpha \vec{+} \beta) = (c \cdot \alpha) \vec{+} (c \cdot \beta)$

Distributividade da multiplicação escalar pela, ou em relação à, soma vectorial.

b) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{F}, \forall \alpha \in \mathbf{V}: (c_1 c_2) \cdot \alpha = c_1 \cdot (c_2 \cdot \alpha) = (c_2 c_1) \cdot \alpha = c_2 \cdot (c_1 \cdot \alpha)$

Associatividade comutativa da multiplicação de escalares e multiplicação escalar.

c) $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{F}, \forall \alpha \in \mathbf{V}: (c_1 + c_2) \cdot \alpha = (c_1 \cdot \alpha) \vec{+} (c_2 \cdot \alpha)$

Distributividade entre a soma de escalares, a multiplicação escalar e a soma vectorial.

d) $\forall \alpha \in \mathbf{V}: 1 \cdot \alpha = \alpha$,

Onde, como se viu, 1 é o elemento neutro da multiplicação entre escalares, da multiplicação em $\mathbb{F}$. Esta propriedade vincula o elemento neutro da multiplicação entre escalares a ser o elemento neutro da multiplicação escalar.

e) $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{V}: 0 \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0_{\mathbf{V}}$,

Onde 0 é o elemento neutro da soma entre escalares, da soma em $\mathbb{F}$. Esta propriedade vincula o elemento nulo da multiplicação entre escalares a ser um elemento anulador da multiplicação escalar. Notar que o elemento neutro da soma entre escalares é um elemento absorvedor, "absorvente na prática", na multiplicação escalar. O elemento absorvente na multiplicação escalar é o $0_{\mathbf{V}}$, pois vem que $\forall c \in \mathbb{F}: c \cdot 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}}$. É o absorvente porque é o resultado. O zero escalar é apenas um elemento anulador, absorvedor, pois não pode ser resultado da operação. ▲

A definição que foi efectuada não pressupõe a comutatividade da multiplicação e é válida apenas para multiplicação escalar à esquerda.

[nDIX.01] Não fica definido o que se entende por multiplicação escalar à direita, nem que resultado teria. ▲

XI.2.4.2 - Obtenção de um espaço vectorial a partir de um conjunto finito qualquer

Consideremos um conjunto finito Ω. Consideremos o conjunto potência de Ω, 2^{Ω}, o conjunto de todos os subconjuntos de Ω.

Defina-se $\mathbf{V} = 2^{\Omega}$. Consequentemente todos os elementos de $\mathbf{V}$ são conjuntos. Para que os elementos de $\mathbf{V}$ possam ser considerados vectores apenas falta definir o que se entende por soma vectorial e que conjunto é que é o vector nulo, $0_{\mathbf{V}}$.

Neste conjunto $\mathbf{V}$ repare-se que a união exclusiva, ou soma exclusiva, $\oplus$, também chamada diferença simétrica, é comutativa e associativa, tem o conjunto vazio como elemento neutro e qualquer conjunto é o seu próprio inverso, pois $\forall \alpha \in \mathbf{V}$: $\alpha \oplus \alpha = \varnothing$. O conjunto $\mathbf{V}$ munido desta soma constitui um grupo abeliano, pelo que os seus elementos serão vectores pelas razões apontadas atrás.

Assim neste caso a soma exclusiva deve ser considerada como sendo a soma vectorial. Desta forma para $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{V}$ vem que $\alpha \vec{+} \beta = \left(\left(\alpha \cap \overline{\beta}\right) \cup \left(\overline{\alpha} \cap \beta\right)\right) = \alpha \oplus \beta$. O elemento neutro da união exclusiva, o conjunto vazio, $\varnothing$, deverá ser considerado o vector nulo, $\varnothing = 0_{\mathbf{V}}$.

Para se poder falar do espaço vectorial $\mathbf{V}$ falta definir, quer $\mathbb{F}$, o corpo dos escalares, quer $\cdot$, a multiplicação escalar.

Procurando definir $\mathbb{F}$, opte-se pelo minimalismo simplista. Considere-se assim que o conjunto $\mathbb{F}$ só tem dois elementos, sendo por isso rebaptizado F_2. Os referidos elementos serão referidos, sem perda de generalidade, como o 0 e o 1. As operações de soma entre escalares, $+$, e multiplicação entre escalares, são definidas respectivamente pelas tabelas seguintes, onde a tabela da soma exibe o símbolo respectivo, e a da multiplicação cumpre a convencionada omissão de símbolo:

Tabela IX.1: Operações

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\widehat{\varnothing}$	0	1
0	0	0
1	0	1

É possível demonstrar que F_2 munido destas operações constitui um corpo, o corpo $\left(F_2,+,\overset{\frown}{\varnothing}\right)$ (Halmos-1974) (Pereira-2009).

Definindo a multiplicação escalar em concordância com d) e e) vem que

$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{V}:\ 0 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_{\mathrm{V}}$ e que $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{V}:\ 1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$.

Fica assim definido um espaço vectorial sobre F_2 quando $\mathbf{V}$ é um conjunto potência. Sendo $\mathbf{V}$ o conjunto potência de um conjunto finito Ω, os vectores deste espaço vectorial só serão de índole numérica se o conjunto Ω o for. Se o conjunto Ω for um urconjunto, com urdomínio de índole simbólica, não numérica, então é adequado dizer que este espaço vectorial é de índole simbólica. Até podem ser acontecimentos, no sentido da teoria das probabilidades.

XI.2.4.3 - O ket-espaço de um singletão

Na abordagem anterior, primeiramente definiu-se o grupo de vectores $\mathbf{V}$ e só depois é que se foi procurar um corpo de escalares. Como a abordagem foi minimalista, o corpo $\mathbb{F}$ era mínimo, no sentido que só dispunha dos elementos indispensáveis para poder ser considerado um corpo. Consequentemente, a questão da definição da multiplicação escalar ficou facilitada, pois cada vector, independentemente de quantos outros existissem em $\mathbf{V}$, só poderia ser confrontado com dois casos para a multiplicações escalar, o caso unitário, que transformava o vector nele próprio, e o caso nulo, que transformava o vector no vector nulo. Estes dois casos eram os inevitáveis, pois o corpo $\mathbb{F}$ só tinha dois escalares, necessariamente o 1 e o 0. Se em $\mathbb{F}$ existissem mais escalares, por exemplo um c, distinto quer de 0 quer de 1, teria sido necessário definir para cada elemento de $\mathbf{V}$, qual era o resultado da sua multiplicação à esquerda por c, resultado esse necessariamente também em $\mathbf{V}$.

Vamos agora continuar a definir o grupo dos vectores a partir da manipulação adequada de um conjunto finito, como é o caso de um singletão. Ir-se-á colocar novamente a questão da escolha do corpo escalar. Repare-se que nada obsta a que a escolha do corpo escalar possa ser consumada previamente à definição de $\mathbf{V}$. Escolha-se então o corpo escalar.

Como visto, a abordagem minimalista motivou a adopção do corpo F_2. Com outras abordagens ter-se-ão outras motivações para a definição do corpo escalar. Para a escolha do corpo escalar, evite-se agora, quer a abordagem minimalista, quer o exotismo dos corpos não

numéricos. Vai assim ser escolhido um corpo numérico não minimalista. Sendo o corpo numérico é natural que se possam escrever equações algébricas descrevendo relações de interesse entre os seus elementos. Essas equações serão distintas e variadas em função dos interesses motivadores da aplicação das técnicas matemáticas aos problemas concretos colocados pelas necessidades existenciais dos indivíduos e respectivas organizações. Ora, nem todos os corpos numéricos são algebricamente completos, no sentido em que as soluções das equações, entre elementos desse corpo, sejam também elementos do dito corpo. Convém portanto que o corpo seja algebricamente completo, no sentido exposto, para que as soluções de todas as equações entre escalares também sejam sempre escalares do espaço vectorial considerado. Ou seja, procura-se um corpo em que não seja possível a existência de equações cujas soluções não sejam escalares válidos no espaço vectorial a definir. É sabido, (Grillet-1999), (Silva-1964), que o corpo dos números racionais ou dos números reais não são algebricamente completos e que o corpo algebricamente completo, no sentido atrás referido, é o corpo dos números complexos. Considere-se assim que o corpo $\mathbb{F}$ é o corpo $\mathbb{C}$.

Vai agora proceder-se à definição de $\mathbf{V}$, subordinada à condição inescapável do produto escalar, ou seja, que o produto de um número complexo por um elemento de $\mathbf{V}$ terá de ter como resultado novamente um elemento de $\mathbf{V}$.

Com esse intuito considere-se um conjunto singletão Ψ. Sem perda de generalidade, assume-se que o elemento $\psi \in \Psi$ é visto como um símbolo. Consideremos que $\mathbf{V} = \mathbb{C} \times \Psi$, onde, como habitualmente, o símbolo $\times$ exprime o produto cartesiano. Ou seja $\mathbf{V}$ é um conjunto de pares ordenados, onde em cada par o primeiro elemento é membro de $\mathbb{C}$ e o segundo é ψ. Tem-se assim que qualquer elemento $\alpha \in \mathbf{V}$ é um par ordenado $\alpha = (c_\alpha, \psi)$, onde $c \in \mathbb{C}$ e $\psi \in \Psi$.

Para definir a soma vectorial em $\mathbf{V}$ basta considerar que sendo $\alpha = (c_\alpha, \psi)$ e $\beta = (c_\beta, \psi)$, então virá que $\alpha \vec{+} \beta = (c_\alpha + c_\beta, \psi)$. Esta soma é comutativa e associativa, tendo $(0, \psi)$ como seu elemento neutro. Ou seja $(0, \psi) = 0_{\mathbf{V}}$ neste $\mathbf{V}$. O simétrico de qualquer vector (c, ψ) será o vector $(-c, \psi)$.

É comum substituir, com vantagens, esta notação baseada em pares ordenados por uma notação baseada em kets, $| \ \rangle$. Convenciona-se, sem perda de generalidade, que um par ordenado (c, ψ) tem na expressão $c | \psi \rangle$ uma representação em tudo equivalente. Notar como

$c|\psi\rangle$ sugere um produto à esquerda pelo escalar c. De acordo com esta sugestão, convenciona-se também que o par $(1,\psi)$ admite como representações equivalentes quer a expressão $1|\psi\rangle$, quer a simples e expedita expressão $|\psi\rangle$.

A soma vectorial, que na notação de pares ordenados é expressa por $(c_\alpha,\psi)\vec{+}(c_\beta,\psi)=(c_\alpha+c_\beta,\psi)$, é agora expressa como $c_\alpha|\psi\rangle\vec{+}c_\beta|\psi\rangle=(c_\alpha+c_\beta)|\psi\rangle$. O vector nulo será expresso por $0|\psi\rangle$, e o simétrico de $c|\psi\rangle$ será expresso como o vector $-c|\psi\rangle$, tendo-se portanto que $c|\psi\rangle\vec{+}-c|\psi\rangle=(c+(-c))|\psi\rangle=(c-c)|\psi\rangle=0|\psi\rangle$.

Uma particularidade desta notação com kets, é que o ket sem rótulo, $|\ \rangle$ ainda é considerado válido. É utilizado quando o singletão, argumento do produto cartesiano definidor de $\mathbf{V}$ é indefinido, abstracto. Dele só se sabe que é um singletão. Desta forma, embora seja considerado inapropriado escrever pares ordenados com elementos em falta, tal como $(c,\ )$, é prático e perfeitamente admissível escrever $c|\ \rangle$. O poder expressivo da notação com kets é assim mais amplo que o da notação baseada em pares ordenados. Doravante vai ser preferido efectuar a exposição com base na notação com kets, sendo preterida a exposição baseada em pares ordenados.

Recapitulando, o corpo já está definido, o conjunto dos vectores já está definido, a soma vectorial já está definida. Para que a definição de espaço vectorial possa ser consumada falta definir apenas a adequada multiplicação escalar.

Defina-se a multiplicação escalar como $\forall c_1,c_2\in\mathbb{C}$: $c_1\cdot c_2|\psi\rangle=(c_1c_2)|\psi\rangle=c_1c_2|\psi\rangle$.

Veja-se como é cumprida a lista a) a e) de propriedades da multiplicação escalar, para $\forall c,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{C}, \forall\alpha,\beta\in\mathbf{V}$.

A propriedade a), a distributividade da multiplicação escalar pela, ou em relação à, soma vectorial, descrita por $c\cdot(\alpha\vec{+}\beta)=(c\cdot\alpha)\vec{+}(c\cdot\beta)$ virá:

$$c\cdot\left(c_\alpha|\psi\rangle\vec{+}c_\beta|\psi\rangle\right)=\left(cc_\alpha|\psi\rangle\vec{+}cc_\beta|\psi\rangle\right)=\left(cc_\alpha+cc_\beta\right)|\psi\rangle$$

Ou equivalentemente: $c\cdot\left(c_\alpha+c_\beta\right)|\psi\rangle=\left(cc_\alpha+cc_\beta\right)|\psi\rangle$

A propriedade b), a associatividade comutativa da multiplicação de escalares e da multiplicação escalar, descrita por $(c_1c_2)\cdot\alpha=c_1\cdot(c_2\cdot\alpha)=(c_2c_1)\cdot\alpha=c_2\cdot(c_1\cdot\alpha)$ virá:

$$(c_1c_2)\cdot c_\alpha|\psi\rangle=c_1\cdot\left(c_2\cdot c_\alpha|\psi\rangle\right)=c_2\cdot\left(c_1\cdot c_\alpha|\psi\rangle\right)=c_2c_1c_\alpha|\psi\rangle$$

A propriedade c), a distributividade entre a soma de escalares, a multiplicação escalar e a soma vectorial, descrita por $(c_1 + c_2)\cdot \alpha = (c_1 \cdot \alpha) \vec{+} (c_2 \cdot \alpha)$ virá:

$$(c_1 + c_2)\cdot c_\alpha \,|\, \psi\rangle = c_1 \cdot c_\alpha \,|\, \psi\rangle + c_2 \cdot c_\alpha \,|\, \psi\rangle = c_1 c_\alpha \,|\, \psi\rangle + c_2 c_\alpha \,|\, \psi\rangle$$

A propriedade d), que vincula o elemento neutro da multiplicação entre escalares a ser o elemento neutro da multiplicação escalar, descrita por $1 \cdot \alpha = \alpha$, virá:

$$1 \cdot c_\alpha \,|\, \psi\rangle = c_\alpha \,|\, \psi\rangle$$

A propriedade e), que vincula o elemento nulo da multiplicação entre escalares a ser um elemento anulador da multiplicação escalar, descrita por $0 \cdot \alpha = 0_{\mathbf{V}}$, virá:

$$0 \cdot c_\alpha \,|\, \psi\rangle = 0 \,|\, \psi\rangle$$

Tem-se que $\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$: $c_1 \cdot (c_2 + c_3) \,|\, \psi\rangle = (c_1 c_2 + c_1 c_3) \,|\, \psi\rangle$

Definiu-se assim um espaço vectorial a partir de um singletão, apelidado de espaço vectorial simbólico. Este espaço vectorial admite notação ket. Quando notado dessa forma é possível chamá-lo de ket espaço do símbolo ψ , ou simplesmente por ket espaço, quando o símbolo estiver pressuposto ou mesmo indefinido.

IX.2.5 - Perspectivas futuras: Quanto aos aspectos estocásticos

A teoria dos sinais nem sempre é determinística, pelo que outra grande linha de investigação pode ser identificada como o desenvolvimento de uma teoria das probabilidades tolerantes. Numa teoria desse cariz, o acontecimento elementar correspondente ao conjunto vazio, teria uma probabilidade diferente de zero. Tal obrigaria a uma generalização dos axiomas em que assenta a corrente teoria das probabilidades nos moldes que se sugerem já de seguida.

IX.2.5.1 Generalização tolerante da axiomática das probabilidades

Seja Ω um conjunto finito, não vazio, com $\mathtt{N}$ elementos. Represente -se por ω_{n} um seu elemento específico, em que o índice $\mathtt{n}$ é um número natural que só pode assumir valores

desde um até $\mathtt{N}$, inclusive: $(\mathrm{n} \in \mathbb{N}) \wedge (1 \le \mathrm{n} \le \mathrm{N})$. Todo e qualquer $\omega \in \Omega$ é chamado de resultado. O conjunto Ω será chamado de conjunto dos resultados, ou espaço de resultados.

Seja agora $\mathbf{A} = 2^{\Omega}$ o conjunto de todos os subconjuntos de Ω. É sabido que o número de elementos de A é 2^{N}. Identifique-se por A_{k} um seu elemento específico, em que o índice $\mathtt{k}$ é um número natural que só pode assumir valores desde um até 2^{N}, inclusive: $(\mathrm{k} \in \mathbb{N}) \wedge (1 \le \mathrm{k} \le 2^{\mathrm{N}})$. Todo e qualquer $A \in A$ é chamado de acontecimento ou evento.

Em consequência têm-se os seguintes factos: Os elementos de um acontecimento chamam-se resultados. Qualquer acontecimento é um conjunto de resultados. Qualquer conjunto de resultados é um acontecimento. Se esse conjunto for um singletão, ou seja, se possuir um único elemento, um único resultado, o acontecimento será chamado de acontecimento elementar. O conjunto Ω é um acontecimento. O conjunto Ω é o único acontecimento que tem como seus elementos todos os resultados ω_{n}.

A formulação clássica dos axiomas da teoria das probabilidades estipula o seguinte (Reis-2003):

[DIX.01] Considere-se que $\mathrm{P}(\cdot)$ é uma função que associa a todo o evento A um número real, compreendido no intervalo fechado $[0, 1]$, chamado probabilidade de A e que satisfaz:

1) $\mathrm{P}(A) \ge 0, \ \forall A \subseteq \Omega$

2) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

3) Sendo A_1 e A_2 acontecimentos mutuamente exclusivos, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, tem-se que $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2)$. ▲

Esta formulação é intuída a partir da seguinte analogia:

Em termos NTT, um conjunto é um saco grátis com elementos comprados. O conjunto vazio é o saco vazio. O conjunto Ω representa a totalidade das compras, pelo que a conta total é o custo de Ω. Cada elemento tem um preço. O custo de cada $\{\omega\}$ é apenas o preço de ω, pois o saco é grátis. O custo de um acontecimento A é obtido pelo somatório dos preços dos elementos que lhe pertencem. A proporção do custo de A relativamente a Ω representa a sua probabilidade. Qualquer acontecimento custa no máximo tanto como Ω e no mínimo tanto quanto $\varnothing$, o saco vazio.

Para intuir a formulação TT, considere-se a seguinte analogia, onde as diferenças relativamente à anterior estão salientadas pelo tipo de letra a negrito.

Em temos TT, um conjunto é um saco **pago** com elementos comprados. O conjunto vazio é o saco vazio. O conjunto Ω representa a totalidade das compras, pelo que a conta total é o custo de Ω. Cada elemento tem um preço. O custo de cada $\{\omega\}$ **não** é apenas o preço de ω, pois o saco **não** é grátis. O custo de um acontecimento A é obtido pelo somatório dos preços dos elementos que lhe pertencem, **mais o preço do saco**. A proporção do custo de A relativamente a Ω representa a sua **potencialidade**. Qualquer acontecimento custa no máximo tanto como Ω e no mínimo tanto quanto $\varnothing$, o saco vazio.

[SIX.01] Para minimizar desajustes conceptuais preferiu atribuir-se um novo nome, potencialidade, ao conceito de probabilidade tolerante. Nomes como eventualidades, possibilidades, porventura mais adequados, já estão em uso. ♦

Pelo atrás exposto, uma generalização dos axiomas para a situação TT deverá ter em atenção o seguinte: enquanto que em termos NTT se pode concluir que $\mathrm{P}(\varnothing)=0$, em termos TT ter-se-á que $\hat{\mathrm{P}}(\varnothing)\geq 0$. No entanto, quando se der o caso particular de $\hat{\mathrm{P}}(\varnothing)=0$ (saco grátis) os axiomas TT, e consequentemente todos os teoremas, deverão ser equivalentes aos clássicos NTT. Dito de outra forma: as potencialidades são numericamente iguais às probabilidades quando $\hat{\mathrm{P}}(\varnothing)=0$. Relembre-se que $\hat{\varnothing}$ não é um acontecimento, mas que $\varnothing$ já o é.

Uma proposta de generalização TT para os axiomas da probabilidade virá então:

[DIX.02] Considere-se que $\hat{\mathrm{P}}(\cdot)$ é uma função que associa a todo o evento A um número real, compreendido no intervalo fechado $[0,1]$, chamado probabilidade tolerante ou simplesmente **potencialidade** de A e que satisfaz:

1) $\hat{\mathrm{P}}(A)\geq 0,\ \forall A\subseteq\Omega$

2) $\hat{\mathrm{P}}(\Omega)=1$

3) Sendo A_1 e A_2 acontecimentos mutuamente exclusivos, $A_1\cap A_2=\varnothing$, tem-se que

$$\hat{\mathrm{P}}(A_1\cup A_2)=\hat{\mathrm{P}}(A_1)+\hat{\mathrm{P}}(A_2)-\hat{\mathrm{P}}(\varnothing).$$ ▲

Estes axiomas têm as seguintes consequências imediatas.

[TIX.01] NTT: $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

TT: $\hat{\mathrm{P}}(\overline{A}) = 1 - \hat{\mathrm{P}}(A) + \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$

D: Tem-se que A e $\overline{A}$ são sempre acontecimentos mutuamente exclusivos, $A \cap \vec{A} = \varnothing$, tais que $A \cup \vec{A} = \Omega$.

Pelo axioma 3, $\hat{\mathrm{P}}(A \cup \overline{A}) = \hat{\mathrm{P}}(A) + \hat{\mathrm{P}}(\overline{A}) - \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$, mas como $A \cup \vec{A} = \Omega$ vem que $\hat{\mathrm{P}}(\Omega) = \hat{\mathrm{P}}(A) + \hat{\mathrm{P}}(\overline{A}) - \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$. Pelo axioma 2, $\hat{\mathrm{P}}(\Omega) = 1$, o que permite escrever $1 = \hat{\mathrm{P}}(A) + \hat{\mathrm{P}}(\overline{A}) - \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$. Assim, é possível concluir $\hat{\mathrm{P}}(\overline{A}) = 1 - \hat{\mathrm{P}}(A) + \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$. ■

[TIX.02] NTT: $\mathrm{P}(A_1 - A_2) = \mathrm{P}(A_1) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$

TT: $\hat{\mathrm{P}}(A_1 - A_2) = \hat{\mathrm{P}}(A_1) - \hat{\mathrm{P}}(A_1 \cap A_2) + \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$

D: Tem-se que $A_1 = A_1 \cap \Omega$, pelo que

$$A_1 = A_1 \cap (A_2 \cup \overline{A}_2)$$

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2).$$

Ora, como $\varnothing = (A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap \overline{A}_2)$, os acontecimentos $(A_1 \cap A_2)$ e $(A_1 \cap \overline{A}_2)$ são mutuamente exclusivos.

Aplique-se o axioma 3, notando que $A_1 - A_2 = A_1 \cap \overline{A}_2$. Vem então que

$\hat{\mathrm{P}}(A_1) = \hat{\mathrm{P}}((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2)) = \hat{\mathrm{P}}(A_1 \cap A_2) + \hat{\mathrm{P}}(A_1 - A_2) - \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$, pelo que:

$\hat{\mathrm{P}}(A_1 - A_2) = \hat{\mathrm{P}}(A_1) - \hat{\mathrm{P}}(A_1 \cap A_2) + \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$. ■

[TIX.03] NTT: $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$

TT: $\hat{\mathrm{P}}(A_1 \cup A_2) = \hat{\mathrm{P}}(A_1) + \hat{\mathrm{P}}(A_2) - \hat{\mathrm{P}}(A_1 \cap A_2)$

D: Tem-se que $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap \overline{A}_1)$, pelo que

$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1)$, onde $A_1 \cap (A_2 - A_1) = \varnothing$.

Então, pelo axioma 3, vem que:

$\hat{\mathrm{P}}(A_1 \cup A_2) = \hat{\mathrm{P}}(A_1) + \hat{\mathrm{P}}(A_2 - A_1) - \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$. Aplicando o teorema anterior, vem

$\hat{\mathrm{P}}(A_1 \cup A_2) = \vec{\mathrm{P}}(A_1) + \hat{\mathrm{P}}(A_2) - \hat{\mathrm{P}}(A_2 \cap A_1) + \hat{\mathrm{P}}(\varnothing) - \hat{\mathrm{P}}(\varnothing)$, pelo que

$\hat{\mathrm{P}}(A_1 \cup A_2) = \hat{\mathrm{P}}(A_1) + \hat{\mathrm{P}}(A_2) - \hat{\mathrm{P}}(A_1 \cap A_2)$. ■

A partir daqui muitos mais desenvolvimentos são possíveis. Todos eles se reduzirão ao caso clássico, NTT, sempre que se der o caso particular de $\hat{\mathrm{P}}(\varnothing)=0$. De notar que tudo indica que a lei de Bayes TT tenha a mesma expressão que a NTT. Também existem indicações de que, quando a variável aleatória é contínua, a potencialidade do evento estar no intervalo entre a e b é $\hat{\mathrm{P}}(a \le x < b)=\hat{\mathrm{P}}(\varnothing)+\int_a^b \mathrm{pdf}(x)dx$.

IX.3 Súmula

Encerra-se neste momento a elaboração deste texto, texto esse que se assume dentro dos limites e propósitos adequados a uma tese de doutoramento. No entanto, encerrar este texto é o necessário ponto de partida para prosseguir com a actividade de pesquisa nesta linha.

Foi iniciado o desenvolvimento teórico, sob o ponto de vista da tolerância à ausência de dados, do tratamento de algumas situações recorrentes nestas técnicas empíricas e noutras situações comuns de processamento de sinais. Uma dessas situações recorrentes é referida como o problema das extremidades, que mais não é do que o problema prático de pressupor correctamente algumas características do sinal para lá da janela de observação.

Finalmente subsiste a consciência de que há muito mais trabalho por fazer do que todo aquele que serviu de base à elaboração do presente texto.

Bibliografia

Allouche-2003	J. P. Allouche, J. Shallit: *Automatic Sequences* ISBN: 052-182-3323, Cambridge University Press, Cambridge, UK. 2003
Almeida-2006	R. Almeida: *Automatic ECG Characterization: Application to the QT Interval Variability*. PhD Thesis, U. Porto. 2006
Aubyn-2004	António St. Aubyn et al: *Conjuntos*, Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa. 2004
Balocchi-2003	R. Balocchi, D. Menicucci, M. Varanini: *Empirical mode decomposition to approach the problem of detecting sources from a reduced number of mixtures*. Proceedings of the 25th Annual Intemational Conference of the IEEE EMBS. Cancun, Mexico September 17-21. 2003
Balocchi-2004	R. Balocchi, D. Menicucci, E. Santarcangelo, L. Sebastiani, A. Gemignani, B. Ghelarducci, M. Varanini: *Deriving the respiratory sinus arrhythmia from the heartbeat time series using empirical mode decomposition*. Chaos, Solitons & Fractals, Volume 20, Issue 1, Pages 171-177. ISSN 0960-0779. 2004
Berge-1973	Claude Berge: *Graphes et Hypergraphes*, ISBN: 204-009-7554, Bordas, Paris. 1973
Bernal-2000	D Bernal, B Gunes: *An examination of instantaneous frequency as a damage detection tool*- Engineering Mechanics Conference. 2000
Bernardi-2006	Olivier Bernardi: *Bijective counting of tree-rooted maps*, Combinatorics and Optimization Seminar, Waterloo University. 2006
Blizard-89	Wayne D. Blizard: *Multiset Theory*. Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume 30, Number 1. 1989
Booth-1967	Taylor L. Booth: *Sequential Machines and Automata Theory*, ISBN: 978-047108-8486, John Wiley & Sons Inc, New York. 1967

Bouchikhi-2008	A. Bouchikhi, A. Boudraa; S. Benramdane, E. Diop: *Empirical Mode Decomposition and some operators to estimate Instantaneous Frequency: A comparative study*. 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing,. ISCCSP 2008. (608 - 613). 2008
Boudraa-2004	A. Boudraa, J. Cexus, F. Salzenstein, L. Guillon: *IF estimation using empirical mode decomposition and nonlinear Teager energy operator*. First International Symposium on Control, Communications and Signal Processing. (45 - 48). 2004
Bourbaki-1970	N. Bourbaki: *Théorie des ensembles* , Hermann, Paris. 1970
Braumann-1987	Pedro Braumann: *Teoria da Medida e das Probabilidades*, ISBN: 972-310-3761, Gulbenkian, Lisboa. 1987
Brualdi-1999	Richard A. Brualdi: *Introductory combinatorics, 3rd Ed.* ISBN: 013-181-4885, Prentice Hall, New Jersey. 1999
Cabral-2009	I. Cabral, C. Perdigão, C. Saiago: *Álgebra Linear*, ISBN: 978-972592-2392, Escolar Editora, Lisboa. 2009
Cajori-1991	Florian Cajori: *A History of Mathematics, 5th Ed* ISBN: 082-841-3037, Chelsea Publishing Company, Rhode Island. 1991
Cantor-1895	Georg Cantor: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1. Artikel), in: Mathematische Annalen 46 S. 481-512. 1895
Chappell-2004	M. A. Chappell, S. J. Payne: *The Use of the Hilbert-Huang Transform in the Automated Detection of Venous Gas Emboli*. Proceeding of the European Barometric and Underwater Society Annual Meeting. 2004
Chechurin-2007	V.L. Chechurin, N.V. Korovkin, M. Hayakawa: *Inverse Problems in Electric Circuits and Electromagnetics*. Springer. ISBN 978-0387-335247. 2007
Chunming-2002	Han Chunming, Guo Huadong, Wang Changlin, Tan Qulin: *A new multiscale edge detection technique for synthetic aperture radar images*. Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS '02. 2002

Codd-1970	E. F. Codd: *A Relational Model for Large Shared Data Banks*, Communications of the ACM, Vol 13, n. 6. 1970
Codd-1979	E. F. Codd: *Extending the Database Relational Model to Capture More Meaning*, ACM Transactions on Database Systems, Vol 4, n. 4. 1979
Coelho-2010	Francisco Coelho, João Pedro Neto: *Teoria da Computação*, ISBN: 978-972592-2811, Escolar Editora, Lisboa. 2010
Cohen-1995	L. Cohen: *Time-frequency analysis*. Prentice-Hall PTR. ISBN 0-13-594532-1. 1995
Cohen-1997	D. Cohen: *Introduction to Computer Theory, 2Ed* 047-113-7723, John Wiley & Sons, New York. 1997
Courant-1962	R. Courant, D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics -Vol II*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA. ISBN 978-0-471-50439-9. 1962
Cummings-2004	D. A. T. Cummings, R. A. Irizarry, N. E. Huang, T. P. Endy, A. Nisalak, K. Ungchusa, D. S. Burke: *Travelling waves in the occurrence of dengue haemorrhagic fever in Thailand*. Nature, Vol 427. 2004
Datig-2002	Marcus Datig , Torsten Schlurmann: *Cubic splines as an essential tool for the Empirical Mode Decomposition*. 2nd Workshop on Water Waves, Technical University, Berlin. 2002
Douka-2005	E. Douka, L.J. Hadjileontiadis: *Time–frequency analysis of the free vibration response of a beam with a breathing crack*. NDT&E International 38 (3–10). 2005
Eco-1984	Humberto Eco: *Semiótica e Filosofia da Linguagem*, ISBN: 972-840-7807, Instituto Piaget, Lisboa. 1984
Ekamn-1971	Ekman and Friesen: *Constants across cultures in the face and emotion,* Journal of Personality & Social Psychology, 17(2) 124-129. 1971
Escoda-2006	O. Escoda, L. G. Lemay, J. Hernandezy, P. Vandergheynst, J.-M. Vesin: *Ventricular and atrial activity estimation through sparse ecg signal decomposition*s, Proc. of IEEE ICASSP'06. 2006

Ferreira-1993	J. Campos Ferreira: *Introdução à Análise Matemática*, ISBN: 972-310-1793, 5ª Ed, Gulbenkian, Lisboa. 1993
Flandrin-1998	P. Flandrin: *Time-Frequency/Time-Scale Analysis*. Academic Press. ISBN 978-0122-598708. 1998
Flandrin-2004	P. Flandrin, P. Gonçalvès, G. Rilling: *Some aspects of Huang's "Empirical Mode Decomposition," from interpretation to applications*. CHA'04 Nashville (TN). 2004
Flandrin-2004b	P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalves: *On Empirical Mode Decomposition as a Filter Bank*. IEEE Signal Processing Letters, vol.11, No.2, Feb. 2004.
Fournier-2004	R. Fournier, E. Delechelle, J. Lemoine: *Stabilogram phase estimation*. IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Vol 1 (357 - 363). 2004
Ganguly-2003	N. Ganguly, B. K Sikdar, A. Deutsch, G. Canright, P. Chaudhuri: *A survey on cellular automata*. Technical Report, Centre for High Performance Computing, Dresden University of Technology. 2003
Gloersen-2003	Per Gloersen, Norden Huang: *Comparison Of Interannual Intrinsic Modes In Hemispheric Sea Ice Covers And Other Geophysical Parameters*. IEEE Transactions On Geoscience And Remote Sensing, Vol. 41, No. 5, May. 2003
Göbel-1980	F. Göbel: *On a l-l-Correspondence between Rooted Trees and Natural Numbers*, Journal Of Combinatorial Theory, Series B 29, 141-143. 1980
Goodstein-1971	R. L. Goodstein: *Development of mathematical logic*, 978-023617-6694, Logos Press. 1971
Graham-1994	R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd Edition*. Addison-Wesley Professional. ISBN: 978-0201-558029. 1994
Grillet-1999	P. Grillet: *Álgebra*, ISBN: 047-125-2433, Wiley, New York. 1999
Gruska-2000	Josef Gruska: *Quantum Computing*, ISBN: 978-007709-5031, McGraw Hill, New York. 2000

Guerreiro-1989	J. Santos Guerreiro: *Curso de Análise Matemática*, Escolar Editora, Lisboa. 1989
Guerreiro-2008	J. Santos Guerreiro: *Curso de Análise Matemática*, ISBN: 978-972592-2224, Escolar Editora, Lisboa. 2008
Hadamard-2002	Jacques Hadamard: *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Princeton University Bulletin, 49-52. 1902.
Halmos-1974	P.R. Halmos: *Finite-Dimensional Vector Spaces*. ISBN: 978-038790-0933. Springer. 1974
Hamm-2005	Andrew J. Hamm, Per Gloersen: *A time series analysis of multiyear sea ice in the central Arctic*. 85th AMS Annual Meeting. 2005
Hamming-1986	Richard W. Hamming: *Coding and Information Theory*, ISBN: 978-013139-0720, Prentice Hall, New Jersey. 1986
Hamming-1998	Richard W. Hamming: http://www.siam.org/news/news.php?id=893. 1998
Harris-2007	David Harris & Sara Harris: *Digital Design and Computer Architecture* ISBN: 978-0123704-979, Morgan Kaufmann, San Francisco. 2007
Haykin-1998	Simon Haykin: *Neural Networks (2Ed)*, ISBN: 978-013273-3502, Prentice Hall, New Jersey. 1998
Hehner-1993	Eric C. R. Hehner: *A Practical Theory of Programming*, www.cs.utoronto.ca/~hehner/aPToP, ISBN: 038-794-1061 Springer. 1993
Hehner-2004	Eric C. R. Hehner: *from Boolean Álgebra to Unified Algebra*, http://www.springerlink.com/content/n61x70v7v2018744/, 0343-6993, The Mathematical Intelligencer, Springer New York. 2004
Heijenoort-1967	Jean van Heijenoort: *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts. 1967
Higgins-1977	J. R. Higgins: *Completeness and basis properties of sets of special functions*. ISBN: 052-160-4885. Cambridge University Press. 1977

Huang-1998	Norden E. Huang, Zheng Shen, Steven R. Long, Manli C. Wu, Hsing H. Shih, Quanan Zheng, Nai-Chyuan Yen, Chi Chao Tung and Henry H. Liu: *The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis* Proc. R. Soc. Lond. A 454, 903{995). 1998
Huang-1999	Huang, Norden E. and Shen, Zheng and Long, Steven R. *A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum.* Annual Review of Fluid Mechanics, 31 . pp. 417-457. ISSN 0066-4189. 1999
Huang-2003	Norden E. Huang, Man-Li C. Wu, Steven R. Long, Samuel S. P. Shen, Wendong Qu: *A confidence limit for the empirical mode decomposition and Hilbert spectral analysis*. Proc. R. Soc. Lond. A 459, 2317–2345. 2003
Huanyin-2001	Yue Huanyin, Guo Huadong, Han Chunming, Li Xinwu, Wang Changlin: *A SAR interferogram filter based on the empirical mode decomposition method*. IGARSS '01, Geoscience and Remote Sensing Symposium. 2001
Hungerford-1980	T. W. Hungerford: *Algebra*, ISBN: 978-038790-5181, Springer. 1980
Hyvärinen-2000	A. Hyvärinen, E. Oja: *Independent Component Analysis: Algorithms and Applications*. Neural Networks, 13(4-5):411-430. 2000
Irschik-2002	K. Irschik, U. Sparboom, H. Oumeraci: *Breaking Wave Characteristics For The Loading Of A Slender Pile*. Proc. of the 28th Int. Conf. Coastal Eng., Cardiff. 2002
Ishihara-1917	Shinobu Ishihara: *Ishihara Color Test*, http://en.wikipedia.org/wiki/Ishihara_color_test. 1917
Jech-2006	Thomas Jech: *Set Theory 3rd Ed*, ISBN: 978-354044-0857, Springer, Berlin. 2006
Jolliffe-2002	I.T. Jolliffe: *Principal Component Analysis*. ISBN: 038-795-4422. Springer Verlag. 2002
Kakurin-2003	A. M. Kakurin, I. I. Orlovsky:*Tearing-mode Identification of Tokamak Plasmas from Mirnov Signals*. 30th EPS Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys. 2003

Karttunen-2007	Antti Karttunen: *Introductory Survey of Catalan Automorphisms*, Tornipolku 11 A 28, 06400 Porvoo, Finland. 2007
Kernighan-1988	B. W. Kernighan, D. M. Ritchie: *The C Programming Language (2Ed)* ISBN:978-013110-3627, Prentice Hall; New Jersey. 1988
Kizhner-2004	Semion Kizhner, Thomas P. Flatley, Norden E. Huang, Karin Blank, Evette Conwell: *On the Hilbert-Huang Transform Data Processing System Development*. 2004 IEEE Aerospace Conference Proceedings. 2004
Kizhner-2006	S. Kizhner, K. Blank, T. Flatley, N. E. Huang, D. Petrick, and P. Hestnes: *On certain theoretical developments underlying the Hilbert-Huang transform*. IEEE Aerospace Conference. 2006.
Kleene-1951	S. C. Kleene: *Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata* USAF Research Memorandum RM-704, Rand Corp. Califórnia. 1951
Kneale-1991	William Kneale & Martha Kneale: *O desenvolvimento da Lógica*, ISBN: 972-3105-322, Gulbenkian, Lisboa 1991
Kohavi-1970	Zvi Kohavi: *Switching and finite automata theory*, McGraw-Hill, New York. 1970
Komm-2001	R. W. Komm, F. Hill, R. Howe: *Empirical Mode Decomposition and Hilbert Analysis Applied to Rotation Residuals of the Solar Convection Zone*. The Astrophysical Journal, 558:428. 2001
Koshy-2008	Thomas Koshy: *Catalan Numbers with Applications*, ISBN: 978-019533-4548, Oxford University Press. 2008
Kuchi-2003a	P. Kuchi, S. Panchanathan: *Gait Recognition using Empirical Mode Decomposition*. ICAPR. 2003
Kuchi-2003b	P. Kuchi: *Gait Recognition Using Empirical Mode Decomposition Based Feature Extraction*: Master Thesis. Arizona State University. 2003
Kuo-2004	Nan-Jung Kuo, Shih-Jen Huang, Hsiao-Chung Weng , Chung-Ru Ho: *ENSO impact on the longline fishery of the yellowfin tuna in the Pacific Ocean*. WOM-13,Workshop of OMISAR Project, Bali, Indonesia. 2004

Lebrun-2003	Devin N. Lebrun: *Analysis Of Neonatal Heart Rate Variability And Cardiac Orienting Responses*. Master Thesis, University Of Florida. 2003
Lee-2003	Z. K. Lee, T. H. Wu, C. H. Loh: *System identification on the seismic behavior of an isolated bridge*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 32, (1797–1812) . 2003
Li-2003	Xy Li, T. Wang, P. Zhou, HQ Feng, *St-T Complex Automatic Analysis of the Electrocardiograms Signals based on Wavelet Transform*, IEEE, 2003
Li-2003a	Y. F. Li, S. Y. Chang, W. C. Tzeng , K. Huang: *The Pseudo Dynamic Test of RC Bridge Columns Analyzed Through the Hilbert-Huang Transform*. Chinese Journal of Mechanics-Series A, Vol. 19, No. 3. 2003
Li-2003b	Y .F. Li, S. Y. Chang, W. C. Tzeng, K. Huang: *The Seismic Response of RC Bridge Column Analyzed by Using The Hilbert-Huang Transform*. National Science Council of the Taiwanese government. 2003
Liang-2000	Hualou Liang, Zhiyue Lin and Richard W. McCallum: *Artifact Reduction in electrogastrogram Based on the Empirical Model Decomposition Method*, Medical & Biological Engineering & Computing, 38(1), 35-41. 2000
Linderhed-2002	Anna Linderhed: *2-D empirical mode decompositions - in the spirit of image compression*. Proceedings Vol. 4738, Wavelet and Independent Component Analysis Applications IX, Harold H. Szu; James R. Buss, Editors, pp.1-8, ISBN ISBN: 081-944-488X. 2002
Liu-2004	Z. Liu, H. Wang, S. Peng: *Texture Classification Through Directional Empirical Mode Decomposition*. Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition (ICPR’04). 2004
Ljapin-2009	E. S. Ljapin, A. E. Evseev: *The Theory of Partial Algebraic Operations*, ISBN: 978-904814-8677, Springer. 2009
Locke-1999	John Locke: *Ensaio sobre o Entendimento Humano*, ISBN: 978-972310-8569, Fundação Calouste Gulbenkian. 1999

Lukasiewicz-1964	Jan Lukasiewicz: *Elements of Mathematical Logic*, ASIN: B001KJF2IU. Macmillan. 1964
Machover-1996	Moshé Machover: *Set theory, logic and their limitations*, 052-147-9983, Cambridge University Press, Cambridge. 1996
MacKay-2003	D. J. C. MacKay: *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, ISBN: 052-164-2981. Cambridge University Press. 2003
Magrin-1999	Ivan Magrin-Chagnolleau , Richard G. Baraniuk: *Empirical mode decomposition based time-frequency attributes*. Proc. 69th SEG Meeting. 1999
Mallot-2000	H. A. Mallot: *Computational Vision*. ISBN 0262133814, Mit Press. 2000
Matula-1968	David W. Matula: *A Natural Rooted Tree Enumeration by Prime Factorization*, SIAM Rev. 10, p.273. 1968
MC Wu-2004	M. C. Wu, C. K. Hu, C. K. Peng: *Study the cardiorespiratory synchronization by using the empirical mode decomposition method*. 22nd International Conference on Statistical Physics. 2004
Michel-2010	H. E. Michel, A. A. S. Awwal: *Artificial neural networks using complex numbers and phase encoded weights*. Appl. Opt. 49, B71-B82. 2010
Mirimanof-1917	Dimitry Mirimanoff: *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le probléme fondamental de la théorie des ensembles*, L'enseignement mathematique 19, 37-52, Zurique. 1917
MLC Wu-1999	M.L.C. Wu, , S. Schubert, and N.E. Huang: *The Development of the South Asian Summer Monsoon and the Intraseasonal Oscillation*. J. Climate, 12, 2054–2075. 1999
Montesinos-2003	M.E. Montesinos, J.L. Munõz-Cobo, C. Pérez: *Hilbert–Huang analysis of BWR neutron detector signals application to DR calculation and to corrupted signal analysis*. Annals of Nuclear Energy 30 (715–727. 2003
Morgan-1872	Augustus De Morgan: *A Budget of Paradoxes* Longmans, Green and Co., London. 1872

Moschovakis-2006	Yiannis Moschovakis: *Notes on Set Theory*, ISBN: 978-038728-7225, Springer, New York. 2006
Nakaea-2010	K. Nakaea, Y. Ibab, Y. Tsuboc, T. Fukaic, T. Aoyagid: *Bayesian estimation of phase response curves. Analysis and Modeling of Massively Parallel Neural Signals.* Neural Networks, Volume 23, Issue 6, Pages 752-763. 2010
Neves-2004	João Vasco Neves: *Classificação Estilística dos Tipos de Letra*. Universidade de Aveiro. 2004
Niethammer-2001	M. Niethammer, L.J. Jacobs, J. Qu, J. Jarzynski: *Time-frequency representations of Lamb waves*. J Acoust Soc Am. May;1841-7. 2001
Nunes-2003	J. C. Nunes, O. Niang, Y. Bouaoune, E. Deléchelle, P. Bunel: T*exture analysis based on the Bidimensional Empirical Mode Decomposition with Gray-Level Co-occurrence models*. ISSPA'2003 Seventh International Symposium on Signal Processing and its Applications. 2003
Olhede-2004	S. Olhede, A. T. Walden: *The Hilbert spectrum via wavelet projections*. Proc. R. Soc. Lond. A 460, (955–975). 2004
Oliveira-1982	A. J. Franco de Oliveira: *Teoria dos Conjuntos*, Livraria Escolar Editora, Lisboa. 1982
Oonincx-2004	P. J. Oonincx, J. P. Hermand: *Empirical Mode Decomposition Of Ocean Acoustic Data With Constraint On The Frequency Range*. Proceedings of the Seventh European Conference on Underwater Acoustics, ECUA. Delft, The Netherlands 5-8 July. 2004
Oppenheim-1999	A. V. Oppenheim, R. W. Schafer: *Discrete-Time Signal Processing 2ndEd*, ISBN: 013-754-9202, Prentice Hall. 1999
Ortigueira-2004	M. D. Ortigueira, R. T. Rato: *The Empirical Mode Decomposition*. Biopattern NoE sub-projects 16 and 21 meeting, Chania, Crete. 2004.
Ortigueira-2005	M. D. Ortigueira: *Processamento Digital de Sinais*, ISBN: 972-311-1349, Gulbenkian, Lisboa. 2005

Ostrowski-1990	A. Ostrowski: *Lições de Cálculo Diferencial e Integral*, 5ª Ed, Gulbenkian, Lisboa. 1990
Owis-2002	M. I. Owis , A. -B. M. Youssef1, Y. M. Kadah: *Characterisation of electrocardiogram signals based on blind source separation*. Medical and Biological Engineering and Computing. 2002
Peirce-1958	Charles Sanders Peirce: *Collected Writings (8 Vols.)*. Ed. Charles Hartshorne, Paul Weiss & Arthur W Burks. Harvard University Press. 1931-58
Peng-2003	C. K. Peng: *Potential HHT Applications in Biomedical Signal Analysis*. Harvard Medical School. 2003
Pereira-2009	J. M. S. Simões Pereira: *Matemática Discreta* - *Grafos, Redes, Aplicações* ISBN: 978-972990-0976. Editora Luz da Vida. Coimbra. 2009
Ping-2001	Zhao Jin-Ping, Huang Da-Ji: *Mirror extending and circular spline function for empirical mode decomposition method*. Journal of Zhejiang University - Science A, Vol. 2 No. 3 p.247-252, ISSN 1009-3095. 2001
Pinker-1999	Steven Pinker: *How the Mind Works*, ISBN: 978-096583-8047, W. W. Norton, New York. 1999
Post-1921	Emil L. Post: *Introduction to a General Theory of Elementary Propositions*. American Journal of Mathematics, Vol. 43, No. 3, pp. 163-185. 1921
Prilepko-2000	A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin: *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*. Marcel Dekker Inc. ISBN 0-8247-1987-5. 2000
Qiang-2001	Gai Qiang, Ma Xiaojiang, Zhang Haiyong, Zou Yankun: *Processing time-varying signals by a new method*. CIE International Conference on Radar. 2001
Quek-2003	S. T. Quek, P. S. Tua, Q. Wang: *Detecting anomalies in beams and plate based on the Hilbert–Huang transform of real signals*. Smart Materials And Structures, 12, 447–460. 2003

Quine-1989	W. Quine: *Universal Library*, Quiddities: An Intermittently Philosophical Dictionary, ISBN: 978-067474-3526, Belknap Press of Harvard University. 1989
Rato-2005	Rato, Raul and Ortigueira, Manuel: *A Modified EMD Algorithm for Application in Biomedical Signal Processing*. International Conference on Computational Intelligence in Medicine and Healthcare, CIMED. 2005
Rato-2008	Rato, R.T., Ortigueira, M. D., and Batista, A.G.: *The Empirical Mode Decomposition an Useful Tool for Signal Analysis* In: “New Signal Processing Research”, ISBN: 978-160456-4792, Nova Science Publishers. 2008.
Rato-2008a	Rato, R.T., Ortigueira, M. D., Batista, A.G.: *On the HHT, its problems, and some solutions*. Mechanical Systems and Signal Processing. 2008
Rato-2008b	Rato, R.T. and Ortigueira, M. and Batista, Arnaldo: *The EMD and its use to identify system modes*. International Workshop on New Trends in Science and Technology (NTST2008). 2008
Rato-2008c	Rato, R.T.: *Complexity and emptiness*. Systemic Complexity: new prospects to complex system theory. 7th Congress of the UES Systems Science European Union Lisbon, Dec. 17-19. 2008
Reichenbach-1944	Hans Reichenbach: *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics* ISBN: 048-640-4595, University of California Press. 1944
Reis-2003	E. Reis et al: *Estatística Aplicada 4ed*. ISBN:972-618-245X. Sílabo. Lisboa. 2003
Ribeiro-2007	Carlos M. Ribeiro: *Álgebra Linear e Geometria Analítica* ISEL-DEETC. 2007
Rilling-2003	G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves: *On empirical Mode Decomposition and Its Algorithms*. IEEE-EURASIP Worshopon NonLinear Signal and Image Processing NSIP-03. 2003

Rilling-2006	G. Rilling and P. Flandrin: *On the Influence of Sampling on the Empirical Mode Decomposition*. Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP. 2006
Rosler-2002	Hilke Rosler: *A study on the Empirical Mode Decomposition*. Master Thesis. University of Amstrrdam, Faculty of Natural Sciences, Mathematics and Computer Sciences. 2002
Rubin-1967	Jean E Rubin: *Set theory for the mathematician* Holden-Day. 1967
Russell-1951	Bertrand Russel: *The Autobiography of Bertrand Russell,* ISBN: 978-041522-8626, Routledge, N.Y.. 1951-2000
Salisbury-2002	J. I. Salisbury, M. Wimbush: *Using modern time series analysis techniques to predict ENSO events from the SOI time series*. Nonlinear Processes in Geophysics, 9, 341-345. 2002
Salomaa-1985	Arto Salomaa: *Computation and Automata*. ISBN: 052-130-2455 .Cambridge University Press. 1985
Santos-1997	Diana Santos: *The importance of vagueness in translation* Romansk Forum 5, Juni 1997, pp.43-69
Schlurmann-2000	T. Schlurmann, S. Schimmels, T. Dose: *Spectral Analysis of Freak waves Using Wavelet Spectra (Morlet) and Hilbert Spectra (EMD).* 4th International Conference On Hydro-Science and –Engineering, Seoul. 2000
Schroeder-1997	Michael Schroeder: *A Brief History of the Notation Of Boole's Algebra*, Nordic Journal of Philosophical Logic, Vol. 2, No. 1, pp. 41-62. Scandinavian University Press -1997. http://www.hf.uio.no/ifikk/filosofi/njpl/vol2no1/history/index.html
Serro-2003	Carlos Serro: *Sistemas Digitais: fundamentos algébricos,* ISBN: 972-846-925X, IST Press, Lisboa. 2003
Shannon-1949	W. Weaver, Claude E. Shannon: *The Matemathical Theory of Communication,* University of Illinois Press, Urbana. 1949

Shen-2002	Minfen Shen, Jian Zhang, Rong Song: *A novel method for local frequency estimation of nonstationary random signals*. 6th International Conference on: Signal Processing, 216- 219 vol.1,. ISBN: 078-037-4886. 2002
Shen-2005	Bin Shen: *Estimating the instantaneous frequencies of a multicomponent image by bidimensional empirical mode decomposition*. IEEE International Workshop on Intelligent Signal Processing. ISBN: 078-039-030X. 2005
Shoenfield-1967	Joseph R. Shoenfield: *Mathematical Logic*, ISBN: 156-881-1357, Association for Symbolic Logic, Natick, Massachusetts. 1967
Silva-1964	J. Sebastião e Silva: *Compêndio de Matemática, 1º Vol*, Ministério da Educação Nacional, Lisboa. 1964
Skinner-1971	B. F. Skinner: *Beyond Freedom and Dignity*, ISBN: 978-039442-5559, Knopf, New York. 1971
Skorovs-2004	P. Skorovs: *Time-frequency representation of transient evoked otoacoustic emission*. Technology and Health Care 12 IOS Press (200-201). 2004
Stoffer-1991	David S. Stoffer: *Walsh-Fourier Analysis and Its Statistical Applications*. Joumal of the American statistical Association. Vol. 86, No. 414. June 1991
Suh-2004	C. S. Suh, B. Yang: *On the nonlinear features of time-delayed feedback oscillators*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 9, (515–529). 2004
Suppes-1972	Patrick Suppes: *Axiomatic Set Theory*, ISBN: 048-661-6304, Dover, New York. 1972
Toida-2006	Shunichi Toida. 2006 http://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/content/relation/definition/cp_gen
Trzesicki-1990	K. Trzesicki: *Many-valued tense logic and the problem of determinism*. 20th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp. 228 - 236. 1990
Usowicz-2004	B. Usowicz, J.B. Usowicz: *Spatial and temporal variation of selected physical and chemical properties of soil*. Institute of Agrophysics PAS, Lublin. 2004

Varadarajan-2003	N. Varadarajan, S. Nagarajaiah: *Response Control Of Building With Variable Stiffness Tuned Mass Damper Using Empirical Mode Decomposition and Hilbert Transform Algorithm*. 16th ASCE Eng. Mechanics Conference. 2003
Vatchev-2002	Vesselin Vatchev: *The analysis of the Empirical Mode Decomposition Method*. The Wavelet IDR Center, 6th Workshop: SC Marathon, November 5-14. 2002
Vollman-2007	William T. Vollman: *Uncentering the Earth*, ISBN: 978-039332-9186, W. W. Norton, New York. 2007
Weiping-2005	Hu Weiping, Wang Xiuxin, Liang Yaling, Du Minghui: *A Novel Pitch Period Detection Algorithm Bases on HHT with Application to Normal and Pathological Voice*. Proceedings of the 2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference, Shanghai, China, September 1-4. 2005
Weng-2006	B. Weng, M. Blanco-Velasco, K. Barner: *Baseline wander Correction in ECG by the Empirical Mode Decomposition*. IEEE Bioengineering Conference. 2006
Wittgenstein-2010	Ludwig Wittgenstein: *Tractatus Logico-Philosophicus*, ISBN: 978-144042-4212, CreateSpace. 2010
Wittlin-2004	G. Wittlin, M. Gamon: *The Investigation, Evaluation, and Application of Techniques for Correlating Rotorcraft Full-Scale Water Impact Tests Versus Analyses*. DOT/FAA/AR-04/5. Office of Aviation Research. Washington, D.C. 20591. Final Report. 2004
Xu-2003	Y. L. Xu, S. W. Chen, R. C. Zhang: *Modal Identification Of Di Wang Building Under Typhoon York Using The Hilbert–Huang Transform Method*. Struct. Design Tall Spec. Build. 12, (21–47). 2003
Yang-2000	J. N. Yang, P. K. Kagoo, Ying Lei: *Parametric Identification Of Tall Buildings Using Ambient Wind Vibration Data* 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability. 2000
Yang-2002	J. N. Yang, S. Lin, S. Pan: *Damage Identification Of Structures Using Hilbert-Huang Spectral Analysis*. 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York, NY. 2002

Yang-2003a	J. N. Yang, Y. Lei, S. Pan, N. E. Huang: *System identification of linear structure based on Hilbert-Huang spectral analysis. Part 1: Normal modes*. Earthquake Eng. Structural Dyn., vol. 32, (1443–1467). 2003
Yang-2003b	J. N. Yang, Y. Lei, S. Pan, N. E. Huang: *System identification of linear structure based on Hilbert-Huang spectral analysis. Part 2: Complex modes*. Earthquake Eng. Structural Dyn., vol. 32, (1533–1554). 2003
Yuan-2003	T. Yuan; N. Yu; X. Li: *Image retrieval with EMD for new perceptual color feature*. Proceedings of the 2003 International Conference on Neural Networks and Signal Processing, Vol.2 (965 - 968). 2003
Yuanmao-2002	Shen Yuanmao, Chen Shixiu, Wu Yuanli, Yang Qinghua: *EMD from Negative Corona Discharge*. 3rd International Symposium on Electromagnetic Compatibility. 370- 373. ISBN: 078-037-2778. 2002
Z Wu-2004	Zhaohua Wu, Norden E. Huang: *A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method*. Proc. R. Soc. Lond. A 460, 1597–1611. 2004
Zhang-2003	R. R. Zhang: *HHT-Based Characterization Of Soil Nonlinearity And Liquefaction In Earthquake Recordings*. The U.S.-Taiwan Workshop on Soil Liquefication. National Chiao Tung University, Hsin-Chu, Taiwan. November 3 - 5. 2003
Zhang-2003	R. R. Zhang; S. Ma; E. Safak, S. Hartzell: *Hilbert-Huang Transform Analysis of Dynamic and Earthquake Motion Recordings*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 129, No. 8, August, pp. 861-875. 2003
Zhou-2006	L. Zhou, G. Yang: *HHT method for system identification and damage detection: An experimental study*. Smart Struct Syst;2(2):141-54. 2006
Zhou-2007	P. Zhou, B. Lock, T. Kuiken: *Real time ECG artifact removal for myoelectric prosthesis control*. Physiol. Meas. 28, 397–413. 2007